

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače

mr Tatjana Bajić

MATEMATIKA

- Nastavni sadržaji sa predavanja –

I DEO

1. Matematički pojam i elementi matematičke logike

- Matematički pojam
- Elementi matematičke logike
- Logičke operacije
- Iskazne formule, tautologije, pravila zaključivanja
- Kvantifikatori

2. Skup kao osnovni matematički pojam

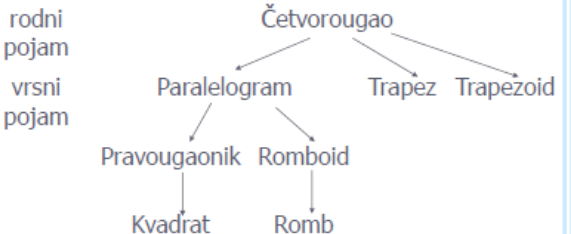
- Pojam skupa. Zapisivanje, obeležavanje i grafičko predstavljanje skupova
- Operacije sa skupovima. Unija, presek, razlika, komplement. Dekartov proizvod skupova
- Relacije na skupu
- Preslikavanje (funkcija)
- Operacije na skupu. Algebarske strukture

3. Skup prirodnih brojeva N

- Pojma prirodnog broja
- Peanova aritmetika
- Zapisivanje prirodnih brojeva i brojevni sistemi. Proširenje skupa prirodnih brojeva.

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače MATEMATIKA  1. MATEMATIČKI POJAM Predavač: mr Tatjana Bajić	POJAM. MATEMATIČKI POJAM ○ Pojam je logička kategorija. ○ Pojam je misao o suštini onoga o čemu mislimo. ○ Suština je ono po čemu je nešto to što jeste. ○ Svojstva (karakteristike), po kojima je nešto to što jeste, nazivaju se njegova bitna svojstva (karakteristike). ○ Matematički objekat je zamišljen (idealan) objekat. ○ Realni su modeli i simboli kojima se obeležavaju matematički objekti. ○ Matematički pojam je svaka zamisao o bitnim karakteristikama matematičkog objekta. 2
PRIMER: POJAM <u>KVADRAT</u> Bitne karakteristike: ○ četiri jednake stranice ○ četiri jednaka (prava) ugla  3	SADRŽAJ POJMA. RODNI (GENERIČKI) POJAM I VRSNI POJAM ○ Oznake pojma su bitne karakteristike pojma. ○ Sadržaj pojma čini skup oznaka pojma odnosno skup bitnih karakteristika pojma. ○ Na primer, sadržaj pojma <u>kvadrat</u>: četiri jednake stranice i četiri jednaka (prava) ugla. ○ Pojam može biti: rodni (generički) i vrsni. ○ Rodni pojam je viši u odnosu na svoj vrsni pojam. ○ Vrsni pojam je niži u odnosu na svoj rodni pojam. ○ U zavisnosti u odnosu na koji se drugi pojam posmatra, jedan pojam može biti istovremeno i rodan i vrsan. 4
PRIMER rodni pojam vrsni pojam  5	SIMBOL (TERMIN) POJMA. SIMBOLI MATEMATIČKIH POJMOVA ○ Simbol (termin) pojma je govorna forma (reč) i/ili oznaka misaone sadržine tog pojma. ○ Primer: reč <u>kvadrat</u> je termin (simbol), govorna forma pojma <u>kvadrat</u> ○ Simboli matematičkih pojmova: • Govorna forma: reči (imena pojmova) • Specijalni pisani znaci • Grafički simboli i crteži 6

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

SIMBOLIZACIJA POJMA KRUŽNICE

- Govorna forma: kružnica
- Slovni znaci: $k(O,r)$
- Grafički simbol kružnice:



- Grafički simbol kruga:



7

MATEMATIČKO - LOGIČKI JEZIK

- Matematičko - logički jezik je kompletan simbolički jezik.
- Lišen je višesmislenosti i nepreciznosti.
- Matematičko - logički jezik je zasnovan na:
 - osnovnom skupu simbola (azbuke) i
 - pravilima izgradnje reči (izraza) i rečenica (formula).
- Zahvaljujući matematičko – logičkom jeziku moguća je konstrukcija strogo formalne teorije.

8

STROGO FORMALNA TEORIJA

- Strogo formalna teorija se sastoji iz:
 - skupa osnovnih pojmova (elementarni pojmovi) i osnovnih simbola
 - skupa osnovnih stavova (aksioma)
 - skupa pravila izvođenja (dokazivanja)
 - stavova kojima se nešto tvrdi i čije tvrdjenje treba dokazati (teoreme).
- Primer strogo formalne teorije: Euklidska geometrija
 - Skup osnovnih pojmova: tačka, prava, ravan i prostor.
 - Dve osnovne relacije: između i pripada.
 - Svi ostali pojmovi se definišu.

9

DEFINICIJA

- Definicija je rečenica kojom se uvodi neki novi pojam na osnovu već poznatih pojmova.
- Primer: Kvadrat je pravougaonik jednakih stranica.
- Definicija se sastoji iz definienduma i definiensa.
- Definiendum - sadrži onaj pojam koji se definiše.
- Definiens - rečenica koja sadrži već poznate pojmove na osnovu kojih se uvodi, objašnjava nov pojam.

10

DEFINICIJA - SVOJSTVA

- Nekreativna - ne sme imati ulogu matematičkog stava.
- Otklonjiva - definicija je samo zamena za već postojeće.
- Što jednostavnija - novi pojam treba da se definiše preko svog najbližeg rodnog pojma.

11

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače
MATEMATIKA

2. ELEMENTI (MATEMATIČKE) LOGIKE

Predavač:
mr Tatjana Bajić

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

ISKAZ

- Iskaz (sud) je misao koja poseduje tačno jednu istinitosnu vrednost, odnosno može biti tačna ili netačna.
- Iskaz se izražava rečenicom (formulom).
- Iskazi se označavaju iskaznim slovima: p,q,r,s,...
- Osnovu svakog mišljenja čine iskazi.
- Primer:
 - p: Danas je veoma topao dan.
 - q: Petkom imamo čas iz matematike.
 - r: Koliko je sati?
 - s: Ja sada lažem.
- Zaključak: p i q su iskazi, dok r i s nisu iskazi.

13

PREMISA I ZAKLJUČAK

- Premise su polazni iskazi.
- Primenom određenih valjanih zakonitosti mišljenja, iz premisa se izvodi novi iskaz - zaključak (zaključni sud).
- Zaključivanje je misaoni proces kojim se izvodi jedan iskaz (zaključni sud) iz jedne ili više drugih iskaza (premise).
- Primer:

Svi studenti imaju visoke ocene iz Matematike.
Ana je student.
Dakle, Ana ima visoku ocenu iz Matematike.

14

ZADATAK LOGIKE

- Logika je nauka koja proučava vrste pravilnog mišljenja.
- Zadatak logike je da odredi put od premise ka zaključku kao i pravilnosti koje se na tom putu koriste.
- Razlikujemo:
 - Neposredno zaključivanje
 - Posredno zaključivanje
 - Zaključivanje po intuiciji

15

1. NEPOSREDNI ZAKLJUČAK

- Zaključni sud se izvodi samo iz jedne premise.
- Šema:

Svaki A je B.
Sledi, neki B je A.

- Primer

Svaki prirodan broj koji se završava sa 0 ili 5 je deljiv sa 5.

Sledi, prirodan broj 245 685 je deljiv sa 5.

16

2. POSREDNI ZAKLJUČAK

- Zaključni sud se izvodi iz najmanje dve premise
- Posredan zaključak može biti:
 - deduktivan
 - induktivan
 - analogijski

17

2.1 DEDUKTIVAN ZAKLJUČAK

- Iz opštih premisa se izvodi poseban (manje opšti) zaključni sud.
- Primer:

Sve planete kruže oko Sunca.
Zemlja je planeta.
Zemlja kruži oko Sunca.

18

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

SILOGIZAM

Silogizam je prost deduktivni zaključak koji ima samo dve premise.

Opšti ili univerzalni sud

Svi P su Q.
 Svi R su P.
 —————
 Svi R su Q.

Partikularan ili poseban sud

Svaki P je Q.
 Svaki P je R.
 —————
 Neki R je Q.

19

SILOGIZAM - PRIMERI

Svi četvorouglovi imaju četiri ugla.
 Svi paralelogrami su četvorouglovi.
 —————
 Svi paralelogrami imaju četiri ugla.

Svaki kvadrat ima sve stranice jednake.
 Svaki kvadrat je pravougaonik.
 —————
 Neki pravougaonik ima sve stranice jednake.

20

2.2 INDUKTIVNI ZAKLJUČAK (SUD)

- Iz manje opštih posebnih premisa se izvodi opšti zaključni sud.
- Primer:

Merkur kruži oko Sunca.
 Venera kruži oko Sunca.
 Zemlja kruži oko Sunca.
 Mars kruži oko Sunca.
 —————
 Sve planete kruže oko Sunca.

21

ŠEMA POTPUNE INDUKCIJE

P_1 je S.
 P_2 je S.
 .
 .
 .
 P_k je S.
 $P_1, P_2, \dots, P_k$ su svi P.
 —————
 Svi P su S.

22

ŠEMA NEPOTPUNE INDUKCIJE

P_1 je S.
 P_2 je S.
 .
 .
 .
 P_k je S.
 $P_1, P_2, \dots, P_k$ su neki P.
 —————
 Svi P su S.

23

2.3 ANALOGIJSKI ZAKLJUČAK (SUD)

- Iz posebnih premisa izvodi se poseban zaključni sud.
- Primer:

Sve strane kvadra su pravougaonici.
 Kvadrat je pravougaonik jednakih stranica.
 —————
 Dakle, sve strane kocke su kvadrati.

24

3. ZAKLJUČIVANJE PO INTUICIJI

- Nema sve elemente logičkog zaključivanja.
- Ima premise od kojih polazi ali proces zaključivanja se bazira na intuiciji (predosećanju).
- Zaključni sud nije uvek istinit, ali može biti u nekim situacijama i plodonosan.

25

2. LOGIČKE OPERACIJE

Predavač:
 mr Tatjana Bajić

ISTINITOSNA VREDNOST ISKAZA

- $p, q, r, \dots$ - iskazna slova
- $T(te)$ i $\perp(ne-te)$ - logičke konstante
- $\tau(p)$ - istinitosna vrednost iskaza p

$$\tau(p) = \begin{cases} T, & \text{ako je iskaz } p \text{ tačan} \\ \perp, & \text{ako je iskaz } p \text{ netačan} \end{cases}$$
- **Primer** Odrediti istinitosnu vrednost iskaza:
 - p : Danas pada kiša.
 - q : $4 < 1$
 - r : Broj 7 je rešenje jednačine $15 - |x - 12| = 10$
 - s : $7 \cdot 9 + 8 = 6$
 - t : Zbir dva prirodna broja je prirodan broj.
 - u : $x(y+z) = xy + xz$

27

LOGIČKE OPERACIJE

- Konjunkcija
- Disjunkcija
- Implikacija
- Ekvivalencija
- Negacija

28

KONJUKCIJA

- Konjunkcija iskaza p i q je iskaz " p i q " i označava se sa $p \wedge q$
- **Konjunkcija – primer:**
- p : broj 6 je deljiv sa 3
- q : broj 9 je deljiv sa 3
- r : broj 12 je deljiv sa 3
- $p \wedge q \wedge r$: Svaki od brojeva 6,9,12 je deljiv sa 3.

29

DISJUNKCIJA

- Disjunkcija iskaza p i q je iskaz " p ili q " i označava se sa $p \vee q$
- Uključna disjunkcija: " p ili q ", $p \vee q$
- Isključna disjunkcija: " p ili q ", $p \veebar q$
- **Disjunkcija – primeri:**
- p : $x < 100$
- q : $y < 100$
- $p \vee q$: Najmanje jedan od brojeva x i y je manji od 100.
- p : "uskoro je podne"
- q : "tek je prošlo podne"
- $p \veebar q$: Ili je uskoro podne ili je tek prošlo podne.

30

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

IMPLIKACIJA

- Implikacija iskaza p i q je iskaz "ako p onda q " i označava se sa $p \Rightarrow q$
- p je pretpostavka, hipoteza
- q je posledica, zaključak
- $p \Rightarrow q$, p je dovoljan uslov za q
- $p \Rightarrow q$, q je potreban uslov za p

31

IMPLIKACIJA - PRIMERI

- p : $x=y$
 q : $y=x$
 $p \Rightarrow q$: Ako je $x=y$ onda je $y=x$.
- p : broj je deljiv sa 10
 q : broj je deljiv sa 5
 $p \Rightarrow q$: Da je broj deljiv sa 5 dovoljno je da je deljiv sa 10.
- p : broj je deljiv sa 10
 q : broj je deljiv sa 5
 $p \Rightarrow q$: Da je broj deljiv sa 10 potrebno je da je deljiv sa 5.

32

EKVIVALENCIJA

- Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz "ako p onda q i ako q onda p " i označava se sa $p \Leftrightarrow q$
a čita se:
 - p ako i samo ako q
 - p akko q
 - da p , potrebno je i dovoljno q
 - p ekvivalentno q
- Primer
 p : trougao je jednakokraničan
 q : trougao ima sve tri stranice jednake
 $p \Leftrightarrow q$: Trougao je jednakokraničan ako i samo ako su mu sve tri stranice jednake.

33

NEGACIJA

- Negacija iskaza p je iskaz "ne p " i označava se sa $\neg p$
- Primeri:
 p : $n > 15$
 $\neg p$: Prirodan broj n nije veći od 15.
- q : Svi studenti su položili ispit.
 $\neg q$: Bar jedan student nije položio ispit.

34

ISTINITOSNE TABLICE

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	T	T

35

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače
MATEMATIKA

4. ISKAZNE FORMULE. TAUTOLOGIJE. PRAVILA ZAKLJUČIVANJA

Predavač:
mr Tatjana Bajić

ISKAZNE FORMULE

1. Iskazna slova $p, q, r, \dots$ su iskazne formule.
2. Ako su A i B iskazne formule, onda su iskazne formule i sledeći zapisi:
 $A \wedge B \quad A \vee B \quad A \vee B \quad A \Rightarrow B \quad A \Leftrightarrow B \quad \neg A$
3. Iskazne formule se dobijaju jedino primenom pravila 1) i 2) konačan broj puta.

37

TAUTOLOGIJE. METODE ZA ISPITIVANJE ISTINITOSTI ISKAZNIH FORMULA

- Iskazna formula koja za sve vrednosti iskaznih slova ima istinitosnu vrednost T (tačno) naziva se tautologija.
- Iskazne formule A i B su ekvivalentne akko je formula $A \Leftrightarrow B$ tautologija.
- Ukoliko dokažemo da je neka iskazna formula tautologija tada ona predstavlja logički zakon.
- Najčešće metode za ispitivanje istinitosti iskaznih formula:
 - Metoda tablica istinitosti
 - Svođenje na apsurd

38

ZNAČAJNE TAUTOLOGIJE (I)

1. zakon refleksivnosti za implikaciju
$$p \Rightarrow p \quad (1)$$
2. zakon isključenja trećeg
$$p \vee \neg p \quad (2)$$
3. zakon neprotivrecnosti
$$\neg(p \wedge \neg p) \quad (3)$$
4. zakon dvojne negacije
$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p \quad (4)$$
5. zakon negiranja implikacije
$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q \quad (5)$$

ZNAČAJNE TAUTOLOGIJE (II)

6. zakon uklanjanja implikacije
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q \quad (6)$$
7. zakon svodjenja na apsurd
$$\neg(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p \quad (7)$$
8. zakon o pravoj posledici
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow p \wedge q) \quad (8)$$
9. zakon o idempotenciji
$$p \vee p \Leftrightarrow p; \quad p \wedge p \Leftrightarrow p \quad (9)$$
10. zakon apsorpcije
$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p; \quad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \quad (10)$$

40

ZNAČAJNE TAUTOLOGIJE (III)

11. De Morganovi zakoni
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q; \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \quad (11)$$
12. modus ponens (pravilo odvajanja)
$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q \quad (12)$$
13. modus tolens
$$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p \quad (13)$$
14. pravilo sabiranja sa $\perp$
$$p \vee \perp \Leftrightarrow p \quad (14)$$
15. pravilo množenja sa $\top$
$$p \wedge \top \Leftrightarrow p \quad (15)$$

41

ZNAČAJNE TAUTOLOGIJE (IV)

16. komutativnost operacija $\wedge$ i $\vee$
$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p; \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad (16)$$
17. asocijativnost operacija $\wedge$ i $\vee$
$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \quad (17a)$$

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \quad (17b)$$
18. distributivnost $\vee$ prema $\wedge$, odnosno distributivnost $\wedge$ prema $\vee$
$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (18a)$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (18b)$$

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

NEKA PRAVILA ZAKLJUČIVANJA (I)

1. modus ponens

$$\frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

2. pravilo tranzitivnosti implikacije

$$\frac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

3. pravilo tranzitivnosti ekvivalencije

$$\frac{A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C}{A \Leftrightarrow C}$$

4. pravilo kontrapozicije

$$\frac{A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow \neg A}$$

43

NEKA PRAVILA ZAKLJUČIVANJA (II)

5. modus tolens

$$\frac{A \Rightarrow B, \neg B}{\neg A}$$

6. dokaz nabranjem

$$\frac{A \Rightarrow C, B \Rightarrow C}{A \vee B \Rightarrow C}$$

- 7.

$$\frac{A \wedge B \Rightarrow C}{A \wedge \neg C \Rightarrow \neg B}$$

44

5. KVANTIFIKATORI (KVANTORI)

Predavač:
 mr Tatjana Bajić

PREDIKATI

- Rečenica koja sadrži jednu ili više promenljivih i koja postaje iskaz ako sve te promenljive dobiju određenu vrednost, zove se **predikat**.

46

UNIVERZALNI KVANTIFIKATOR

- Oznaka: $\forall$
- Zamenjuje reči: svaki, bilo koji, svi
- $P(x)$ - predikat
- $\forall x P(x)$ - novi predikat
- $\forall x P(x)$: "Za svaki x je $P(x)$."
- Primer: Za svako x, $x+1 > x$.

$$(\forall x)(x + 1 > x)$$

47

EGZISTENCIJALNI KVANTIFIKATOR

- Oznaka: $\exists$
- Zamenjuje reči: postoji, bar jedan, neki, najmanje jedan
- $P(x)$ - predikat
- $\exists x P(x)$ - novi predikat
- $\exists x P(x)$: "Postoji takvo x, da je $P(x)$."
- Primer: Postoji takvo x, da je $3x > 12$.

$$(\exists x)(3x > 12)$$

48

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

KVANTIFIKATOR $\exists!$

- Zamenjuje reči: postoji tačno jedan
- $P(x)$ - predikat
- $\exists! x P(x)$ - novi predikat
- $\exists! x P(x)$: "Postoji tačno jedan x , takav da je $P(x)$."
- Primer: Postoji tačno jedno x , takvo da je $3x=12$.

$$(\exists! x)(3x = 12)$$

49

VEZANE I SLOBODNE PROMENLJIVE. VALJANE FORMULE

- Promenljiva x je u predikatima $(\forall x)P(x)$, $(\exists x)P(x)$, $(\exists! x)P(x)$, redom vezana kvantorima $\forall$, $\exists$ i $\exists!$
- Promenljiva u predikatu koja nije vezana kvantom naziva se slobodnom.
- Primer slobodne promenljive $(\forall x)P(x, y)$
- Logički zakoni sa kvantorima se nazivaju valjane formule.
- Obzirom da su logički zakoni tautologije, valjane formule su uvek tačne.

50

NEKE VALJANE FORMULE

1. De Morganovi zakoni za kvantore:

- a) $\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$
(nije svaki $\Leftrightarrow$ neki nije)
- b) $\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$
(nije neki $\Leftrightarrow$ svaki nije)

2. Zakoni slaganja kvantora sa konjukcijom:

- a) $(\forall x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A \wedge (\forall x)B$
- b) $(\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x)A \wedge (\exists x)B$

3. Zakoni slaganja kvantora sa disjunkcijom:

- a) $(\exists x)(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A \vee (\exists x)B$
- b) $(\forall x)A \vee (\forall x)B \Rightarrow (\forall x)(A \vee B)$

51

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače
MATEMATIKA

2.1 POJAM SKUPA

Predavač: mr Tatjana Bajić

POJAM SKUPA

- Jedan od osnovnih pojmova u matematici - ne definiše se.
- Skup se sastoji iz elemenata (članova) koji imaju neku zajedničku osobinu koja ih povezuje u taj skup.
- Skupovi se označavaju velikim slovima: A, B, C,...

2

POJAM PRIPADA

- Osnovni pojam teorije skupova - ne definiše se
- A - neki skup
- x je član skupa A, odnosno x pripada skupu A, u oznaci $x \in A$
- x nije član skupa A, odnosno x ne pripada skupu A, u oznaci $x \notin A$

3

PRAZAN SKUP

- Prema broju elemenata, skup može biti: konačan i beskonačan.
- Skup koji nema elemenata naziva se prazan skup.
- Oznaka praznog skupa: $\emptyset$.
- Prazan skup je konstanta u skupu skupova.

4

PREDSTAVLJANJE SKUPOVA

1. **Analitički** (ako skup ima konačan broj elemenata)

$$S = \{a, b, c\}$$

2. **Sintetički** (preko karakterističnog svojstva, koje poseduju njegovi elementi)

$$S = \{x \mid s(x)\}$$

"S je skup elemenata x koji imaju svojstvo s(x)"

3. **Grafički** (pomoću Venovog dijagrama)

Venov dijagram je zatvorena kriva linija čiji elementi su tačke koje simbolizuju elemente skupa.

5

KARDINALNI BROJ SKUPA - MOĆ SKUPA

- Broj elemenata skupa zove se **kardinalni broj skupa** ili **moć skupa**.
- S - skup
- card S - oznaka za kardinalni broj skupa S
- card $\emptyset = 0$
- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{N}, \text{ card } A = n$
- A - beskonačan skup, card A je transfinitni broj

6

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

PREBROJIVI SKUPOVI

- $\mathbb{N}$ - skup prirodnih brojeva
- $\mathbb{N}$ - beskonačan skup ali prebrojiv
- $\text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$
- $\aleph_0$ (alef nula) - najmanji transfinitni broj
- $\aleph_0$ je kardinalni broj svih prebrojivih skupova (skupova ekvivalentnih skupu prirodnih brojeva)

7

PODSKUP. JEDNAKOST SKUPOVA

- Skup A je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A takođe element skupa B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

- Dva skupa A i B su jednaka, u oznaci $A=B$, ako su svi elementi jednog skupa ujedno i elementi drugog skupa i obrnuto.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

8

PRAZAN SKUP. DISJUNKTNI SKUPOVI

- Prazan skup je podskup svakog skupa.
 $(\forall A)(\emptyset \subseteq A)$
- Disjunktni skupovi su skupovi koji nemaju zajedničkih elemenata.

9

PARTITIVNI SKUP

- Partitivni skup skupa A, u oznaci $P(A)$, je skup svih podskupova skupa A.

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

$$(\forall A)(\exists P(A))(\forall X)(X \subseteq A \Rightarrow X \in P(A))$$

- $\text{card } P(A) = 2^{\text{card } A}$

10



2.2 OPERACIJE SA SKUPOVIMA

Predavač:
mr Tatjana Bajić

UNIVERZALNI SKUP

- Oznaka univerzalnog skupa: U
- Podskupovi skupa U su skupovi A, B, C,...

12

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

UNIJA I PRESEK SKUPOVA

- Unija dva skupa A i B , u oznaci $A \cup B$, je skup koji sadrži elemente koji pripadaju bar jednom od skupova A i B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

- Presek dva skupa A i B , u oznaci $A \cap B$, je skup koji sadrži sve zajedničke elemente skupova A i B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

13

RAZLIKA I SIMETRIČNA RAZLIKA SKUPOVA

- Razlika skupa A u odnosu na skup B , u oznaci $A \setminus B$, je skup koji sadrži sve elemente iz skupa A koji nisu u skupu B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

- Simetrična razlika skupova A i B , u oznaci $A \Delta B$, je unija skupova $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

14

KOMPLEMENT SKUPA

- Komplement skupa A u odnosu na skup U , u oznaci A' , je skup elemenata iz skupa U koji nisu u skupu A .

$$A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

$$x \in A' \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A$$

15

SVOJSTVA OPERACIJA UNIJE I PRESEKA (I)

- idempotencija

$$A \cup A = A \text{ i } A \cap A = A$$

- komutativnost

$$A \cup B = B \cup A \text{ i } A \cap B = B \cap A$$

- asocijativnost

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

16

SVOJSTVA OPERACIJA UNIJE I PRESEKA (II)

- distributivnost unije u odnosu na presek i preseka u odnosu na uniju

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- apsorptivnost

$$A \cup (A \cap B) = A \text{ i } A \cap (A \cup B) = A$$

- De Morganovi zakoni

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \text{ i } (A \cup B)' = A' \cap B'$$

17

ALGEBRA SKUPOVA

- Algebarska struktura na skupu U , čije su operacije skupovne operacije unija, presek, razlika i komplement, u oznaci

$$(U, \cup, \cap, \setminus, ')$$

naziva se algebra skupova.

18

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

UREĐEN PAR

- Dvočlan skup se naziva par.
- Dvočlan skup (a,b) u kome je bitan poredak elemenata naziva se uređen par.
- (x,y) i (a,b) uređeni parovi
- $(x,y)=(a,b) \Leftrightarrow x=a$ i $y=b$

19

DEKARTOV PROIZVOD

- Dekartov proizvod skupova A i B , u oznaci $A \times B$, je skup svih uređenih parova (a,b) gde $a \in A$ i $b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

- Dekartov proizvod, direktan proizvod ili Kortezijski proizvod
- Dekartov kvadrat skupa A
 $A^2 = A \times A$

20



2.3 RELACIJE NA SKUPU

Predavač:
 mr Tatjana Bajić

POJAM RELACIJE

- $M = \{m1, m2, m3\}$
- $D = \{d1, d2\}$
- Relacija: "biti partner u igranju"
 $M \times D = \{(m,d) \mid m \in M \wedge d \in D\}$
 $D \times M = \{(d,m) \mid d \in D \wedge m \in M\}$
- Prema broju elemenata koji su u nekom odnosu (relaciji), relacije mogu biti:
 - unarne relacije (relacije dužine 1)
 - binarne relacije (relacije dužine 2)
 - ternarne relacije (relacije dužine 3)
 - ...
 - n-arne relacije (relacije dužine n)

22

BINARNA RELACIJA

- Binarna relacija iz skupa A u skup B je svaki podskup ρ Dekartovog proizvoda $A \times B$.

$$\rho \subseteq A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

$x \in A$ i $y \in B$ su u relaciji ρ akko $(x,y) \in \rho$

$$x \rho y \Leftrightarrow (x,y) \in \rho$$

23

RELACIJA NA SKUPU

- $A \neq \emptyset$
- Binarna relacija na skupu A je bilo koji podskup ρ uređenih parova iz skupa $A^2 = A \times A$, odnosno bilo koji podskup ρ njegovog Dekartovog kvadrata $A^2 = A \times A$.
- n-arna relacija na skupu A je bilo koji podskup skupa $A^n = A \times A \dots \times A$.

24

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

BINARNA RELACIJA NA SKUPU

- $A \neq \emptyset$
- Na skupu A je definisana binarna relacija ρ , ako za bilo koja dva elementa x i y tog skupa važi tačno jedan od iskaza:
 "x je u relaciji sa y",
 u oznaci $x\rho y$, odnosno $(x, y) \in \rho$,
 ili
 "x nije u relaciji sa y",
 u oznaci $\neg(x\rho y)$, odnosno $(x, y) \notin \rho$.

25

PAZNA I PUNA BINARNA RELACIJA

- ρ binarna relacija na skupu A , $A \neq \emptyset$
- ρ je **prazna relacija** ako
 $\forall (x, y) \in A^2, (x, y) \notin \rho$
- ρ je **puna relacija**, odnosno $\rho = A^2$, ako
 $\forall (x, y) \in A^2, (x, y) \in \rho$

26

SVOJSTVA BINARNIH RELACIJA

- refleksivnost
 $(\forall x \in A)(x\rho x)$
- simetričnost
 $(\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
- asimetričnost (antisimetričnost):
 $(\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$
- tranzitivnost:
 $(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$

27

RELACIJA EKVIVALENCIJE

- Binarna relacija ρ koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna jeste relacija ekvivalencije.
- Oznaka relacije ekvivalencije: $\sim$

28

KLASE EKVIVALENCIJE I KOLIČNIČKI SKUP

- $\sim$ - relacija ekvivalencije na skupu A
- $x \in A$
- Skup svih elemenata iz A koji su ekvivalentni sa x , nazivamo *klasom ekvivalencije elementa x* i označavamo sa
 $C_x = \{y \mid y \in A \wedge x \sim y\}$.
- Skup A je klasama ekvivalencije razbijen (podeljen) na disjunktne podskupove.
- Skup svih klasa ekvivalencije obrazuje novi skup koji se zove količnički skup i označava se sa
 $A / \sim = \{C_x \mid x \in A\}$.

29

RELACIJA PORETKA

- Binarna relacija ρ koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna jeste relacija poretka.

30

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

RELACIJA TOTALNOG PORETKA

- p - relacija poretka na skupu A
- Ako za svaki uređen par (x, y) elemenata iz A^2 važi tačno jedna od formula xpy ili ypx onda kažemo da je p **relacija totalnog poretka**, odnosno skup A je totalno uređen relacijom p i obrazuje **lanac**.
- Ako postoji bar jedan uređen par (x, y) iz A^2 tako da nije tačan nijedan od iskaza xpy ili ypx , onda kažemo da relacija p **delimično uređuje skup** A .

31

2.4 PRESLIKAVANJA (FUNKCIJE)

Predavač:
 mr Tatjana Bajić

FUNKCIJA

- A, B neprazni skupovi
- Funkcija (preslikavanje) skupa A u skup B , u oznaci $f: A \rightarrow B$, je bilo koji postupak, dogovor prema kom se svakom elementu x , skupa A pridružuje tačno jedan element y , skupa B .

$$y=f(x)$$

33

FUNKCIJA POSMATRANA KAO RELACIJA

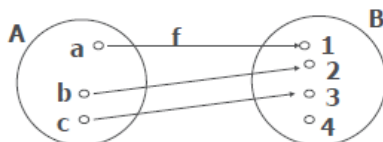
Preslikavanje skupa A u skup B , u oznaci $f: A \rightarrow B$, je podskup skupa $A \times B$, $f \subseteq A \times B$, odnosno f je binarna relacija sa svojstvima:

- Skup svih prvih komponenta skupa f je skup $A = \{x \mid (x, y) \in f\}$.
- Ako $(x, y) \in f$ i $(x, z) \in f$ onda je $y=z$.

34

PRIMER 1

- $f: A \rightarrow B$ definisana sa

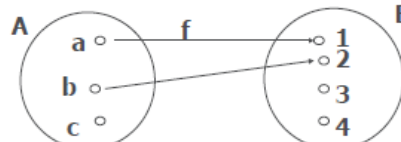


jeste funkcija jer svaki element skupa A ima tačno jednu sliku u skupu B .

35

PRIMER 2

- $f: A \rightarrow B$ definisana sa



nije funkcija jer svaki element skupa A nema svoju sliku u skupu B .

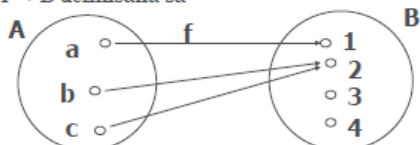
36

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

PRIMER 3

o $f: A \rightarrow B$ definisana sa

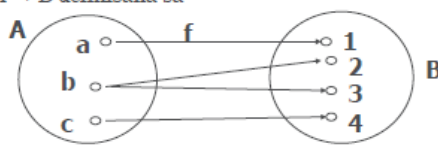


jeste funkcija jer svaki element skupa A ima tačno jednu sliku u skupu B.

37

PRIMER 4

o $f: A \rightarrow B$ definisana sa



nije funkcija jer postoji element skupa A koji ima dve različite slike u skupu B.

38

$f: A \rightarrow B$

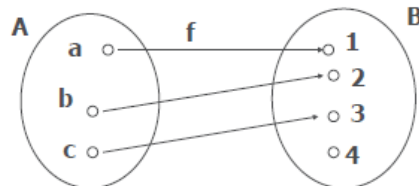
- o Element x , skupa A , se naziva **original**, **nezavisno promenljiva** ili **argument** funkcije f , a element $y=f(x)$, skupa B , **slika**, **zavisno promenljiva** ili **vrednost funkcije** f
- o A - domen funkcije f
- o $f(A) \subseteq B$ - skup vrednosti funkcije f ili kodomen funkcije f

x	$\longrightarrow$	$y=f(x)$
original	$\longrightarrow$	slika
nezavisno promenljiva	$\longrightarrow$	zavisno promenljiva
argument funkcije f	$\longrightarrow$	vrednost funkcije f

39

NAČINI ZADAVANJA FUNKCIJE (1)

- o zadavanje funkcije pomoću grafa



40

NAČINI ZADAVANJA FUNKCIJE (2)

- o pomoću tablice
- o na primer,

x	a	b	c
y	1	2	3

41

NAČINI ZADAVANJA FUNKCIJE (3)

- o pomoću šeme
- o na primer,

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- o pomoću formule (matematičkim izrazom)
- o na primer,

$$f(x)=2x+1$$

odnosno

$$y=2x+1$$

42

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

NAČINI ZADAVANJA FUNKCIJE (4)

- o pomoću grafika u Dekartovoj koordinatnoj ravni
- o na primer, grafik funkcije čija je formula $y = (x + 1)\sqrt{x + 4}$



43

VRSTE PRESLIKAVANJA

Funkcija $f : A \rightarrow B$ je:

- "1-1" preslikavanje ili **injekcija** ako $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
- "na" ili **surjekcija** ako $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$.
- **bijekcija** ili **obostrano jednoznačno preslikavanje** ako je f i injekcija i surjekcija odnosno "1-1 i na".

44

EKVIVALENTNI SKUPOVI

- o Skupovi su ekvivalentni (po kardinalnosti) akko između njih postoji bar jedno "1-1 i na" preslikavanje.
- o Konačni ekvivalentni skupovi su jednakobrojni.
- o Skup je beskonačan ako postoji bar jedna bijekcija skupa i njegovog pravog podskupa.

45

INVERZNO PRESLIKAVANJE

- o Ako je $f : A \rightarrow B$ "1-1" preslikavanje, onda postoji inverzno preslikavanje, u oznaci f^{-1} , koje sliku $f(x)$ "vraća" u original x , odnosno

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

46

KOMPOZICIJA PRESLIKAVANJA

- $f : A \rightarrow B$
- $g : B \rightarrow C$
- Preslikavanje $h : A \rightarrow C$ je kompozicija preslikavanja f i g , u oznaci $h = g \circ f$, ako je za svako x iz A , $h(x) = g(f(x))$.
- Osobine:
 $g \circ f \neq f \circ g$ (nije komutativna operacija)
 $r \circ (g \circ f) = (r \circ g) \circ f$ (asocijativna operacija)
 gde je $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $r : C \rightarrow D$.

47

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
 Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače
MATEMATIKA

2.5 OPERACIJE NA SKUPU

Predavač:
 mr Tatjana Bajić

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

POJAM OPERACIJE

- Pod pojmom operacije se podrazumeva da se od jednog, dva ili više objekata "stvara" nov objekat kao rezultat operacije.
- Operacija je definisana na skupu ako rezultat te operacije takođe pripada tom skupu.

49

OPERACIJE NA SKUPU

- Operacija dužine k na skupu A je svako preslikavanje skupa A^k u skup A .
- Operacija dužine 1 (*unarna operacija*) na skupu A je svako preslikavanje tog skupa u samog sebe.
- Operacija dužine 2 (*binarna operacija*) na skupu A je svako preslikavanje Dekartovog kvadrata tog skupa $A^2 = A \times A$ u skup A .
- Simboli operacija:
 - logičkih operacija: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$
 - skupovnih operacija: $\cup, \cap, \setminus, \cdot$
 - brojevnih operacija: $+, -, \cdot, :, \sqrt{}, \dots$

50

OPŠTA OZNAKA OPERACIJE NA SKUPU

- A neprazan skup
- f je operacija dužine k na skupu A :
 $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = y, \quad x_1, x_2, \dots, x_k, y \in A$
- $\text{card} A = n$
- $\text{card} A^k = n^k$
- Ukupan broj svih operacija dužine k koje se mogu definisati na skupu A je n^k .

Posebno, za $k=2$: n^2

51

PREDSTAVLJANJE BINARNIH OPERACIJA

- Kejljeve tablice

	a_1	a_2	...
a_1	$f(a_1, a_1)$	$f(a_1, a_2)$	...
a_2	$f(a_2, a_1)$	$f(a_2, a_2)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

- šema

$$f = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots \\ f(a_2, a_1) & f(a_2, a_2) & \dots \end{pmatrix}$$

52

BINARNE OPERACIJE U SKUPU N

- N - skup prirodnih brojeva
- U skupu N definisane su operacije sabiranja (+) i množenja ($\cdot$).
- Operacije oduzimanja ($-$) i deljenja ($:$) su uslovno definisane u skupu N .

53

MEDJUSOBNI ODNOS OPERACIJA I RELACIJA

- Svakom operacijom f dužine k , definisanom na nekom skupu, određena je neka relacija ρ dužine $k+1$.
- Ako je $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = y$ onda su elementi $x_1, x_2, \dots, x_k, y$ u nekoj relaciji ρ dužine $k+1$.
- Na primer, x, y, z su u nekoj relaciji ρ (dužine 3) ako je proizvod prva dva elementa jednak trećem: $\rho(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$

54

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

ALGEBARSKI ZAKON

- S - neprazan skup
- O - skup svih operacija definisanih na S
- V - skup promenljivih
- $T(O, V)$ - skup izraza izgrađenih od operacijskih simbola, promenljivih i konstanti iz S
- Algebarski zakon je formula oblika
$$t_1 = t_2 \quad t_1, t_2 \in T(O, V)$$
za sve vrednosti promenljivih u izrazima t_1 i t_2 .

55

PRIMER ALGEBARSKIH ZAKONA

- Algebarskim zakonima se izražavaju svojstva operacija.

Poznati zakoni brojevnih operacija:

- $(\forall x, y) \ x + y = y + x$ komutativnost
- $(\forall x, y, z) \ (x + y) + z = x + (y + z)$ asocijativnost
- $(\forall x, y, z) \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ distributivnost

56

ALGEBARSKA STRUKTURA DEFINICIJA

- S - neprazan skup
- O - skup svih operacija definisanih na S
- R - skup svih relacija definisanih na S
- Skup S zajedno sa svim operacijama i relacijama definisanim na tom skupu obrazuje *algebarsku strukturu*, u oznaci $S = (S, O, R)$.
- (S, O) - operacijska (algebarska) struktura
- (S, R) - relacijska (algebarska) struktura

57

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
 Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače
MATEMATIKA



3. SKUP PRIRODNIH BROJEVA
 Predavač: mr Tatjana Bajić

POJAM PRIRODNOG BROJA

- Prebrojavanjem koliko članova ima neki skup dolazimo do pojma broja jedan, broja dva,... odnosno do pojma prirodnog broja
- $A = \{\text{jabuka, kruška, kajsija}\}$
 $B = \{\text{lutka, meda, zeka}\}$
 $C = \{a, b, c\}$
 $\text{card}A = \text{card}B = \text{card}C$

Skupovi A, B i C nisu isti ali su jednakobrojni.

2

EKVIVALENTNOST SKUPOVA PO KARDINALNOSTI

- U – skup svih skupova
- Binarnu relaciju ρ definišemo na skupu U sa
 $\rho: A \rho B \Leftrightarrow \text{card}A = \text{card}B$
 gde su A i B podskupovi od U .
- Tada, ρ je relacija ekvivalencije na skupu U .
- Svi skupovi su razvrstani u klase ekvivalencije po kardinalnosti.
- Svi skupovi iz jedne klase ekvivalencije imaju isti kardinalan broj.
- Konačni ekvivalentni skupovi su **jednakobrojni**.

3

PREDSTAVNICI KLASA EKVIVALENCIJE

- $\emptyset$ - postoji samo jedan prazan skup
- $\{0\}$ je predstavnik klase ekvivalencije svih jednočlanih skupova
- $\{0, 1\}$ je predstavnik klase ekvivalencije svih dvočlanih skupova
- $\{0, 1, 2\}$ je predstavnik klase ekvivalencije svih tročlanih skupova
- itd.

4

PRIRODNI BROJEVI

- Prirodni brojevi su kardinalni brojevi predstavnika klase ekvivalencije **konačnih** skupova.
- Cifre 0, 1, 2, 3,... 9 su simboli pomoću kojih se označavaju prirodni brojevi.
 $0 = \text{card } \emptyset$
 $1 = \text{card } \{0\}$
 $2 = \text{card } \{0, 1\}$
 $\vdots$

5

SKUP PRIRODNIH BROJEVA

- Skup prirodnih brojeva označavamo sa
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}$.
- Posebno,
 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}$.
- Skup $\mathbb{N}$ je beskonačan, prebrojiv skup, čiji je kardinalni broj, transfinitni broj $\aleph_0$.

6

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

OPERACIJE SABIRANJA I MNOŽENJA U SKUPU $\mathbb{N}$

- A, B disjunktni konačni skupovi
 $\text{card}A + \text{card}B = \text{card}(A \cup B)$
 $\text{card}A \times \text{card}B = \text{card}(A \times B)$
- Primer
 $1 + 2 = \text{card}\{a\} + \text{card}\{a, b\} = \text{card}\{a, b, c\} = 3$
 $3 \cdot 2 = \text{card}\{a, b, c\} \times \text{card}\{d, e\}$
 $= \text{card}(\{a, b, c\} \times \{d, e\})$
 $= \text{card}(\{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}) = 6$
- Skup prirodnih brojeva je zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja odnosno
 $\forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow n + m \in \mathbb{N} \wedge n \cdot m \in \mathbb{N}$.

7

RELACIJA " $\leq$ " U SKUPU $\mathbb{N}$

- Jedan je najmanji prirodan broj, a najveći prirodan broj ne postoji.
- Za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $n+1 \in \mathbb{N}$.
- Prirodni brojevi n i $n+1$ su uzastopni ili sukcesivni brojevi.
- Odatle, skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je ograničen sa donje strane, a sa gornje strane nije ograničen.
- U skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ relaciju " $\leq$ " definišemo sa:
 $"\leq" : n \leq m \Leftrightarrow n$ je manji ili jednak od m ,
za $n, m \in \mathbb{N}$.

Relacija " $\leq$ " je relacija totalnog poretka u skupu $\mathbb{N}$.

8

POJMOVI SLEDBENIK I PRETHODNIK

- U skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ relaciju " $<$ " definišemo sa:
 $"<" : n < m \Leftrightarrow n$ je strogo manji od m
 $\Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N}) n + p = m, \quad n, m \in \mathbb{N}$.
- Niz prirodnih brojeva je uređen tako da svaki broj niza je za jedan veći od prethodnog i za jedan manji od sledećeg broja, što zapisujemo
 $1 < 2 < 3 < \dots < n-1 < n < n+1 < \dots$
- Sledbenik prirodnog broja n je broj koji je za jedan veći od broja n , odnosno broj $n+1$.
- Prethodnik prirodnog broja n je broj koji je za jedan manji od broja n , odnosno broj $n-1$.

9

OPERACIJE ODUZIMANJA I DELJENJA U SKUPU $\mathbb{N}$

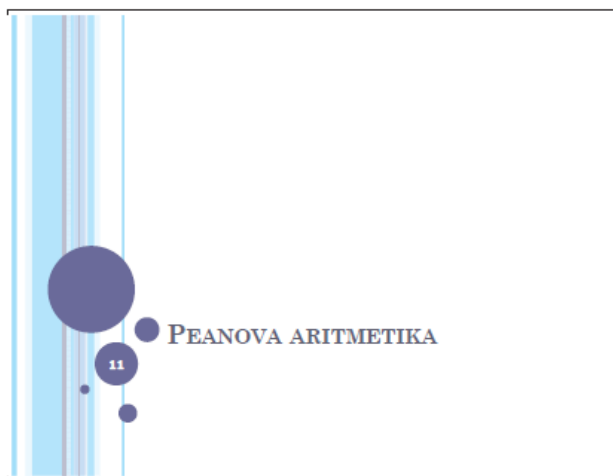
- Operacije oduzimanja i deljenja, kao inverzne operacije sabiranja odnosno množenja, su uslovno izvodljive u skupu $\mathbb{N}$.
- Ako su $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da $n < m$ i $\exists p \in \mathbb{N}$ tako da $m = n + p$, tada,
 - $m - n \in \mathbb{N}$ i $m - n = p \in \mathbb{N}$, ali
 - $n - m \notin \mathbb{N}$ i $n - m = -p \notin \mathbb{N}$.
- Na primer, 3 i 6 su prirodni brojevi takvi da $3 < 6$ i $6 = 2 \cdot 3$. Tada,
 - $6 - 3 = 3$ jeste prirodan broj i $6 : 3 = 2$ jeste prirodan broj,
dok
 - $3 - 6$ nije prirodan broj i $3 : 6 = 3/6 = 1/2$ nije prirodan broj.

10

PEANOVA ARITMETIKA

- Algebarska struktura $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ se naziva aritmetika.
- $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ je potpuno aksiomatizovao italijanski matematičar B. Peano.
- Aksiomatizovana algebarska struktura $(\mathbb{N}, +, \cdot, ', \leq)$ se naziva Peanova aritmetika.
- Peanova aritmetika je primer formalne teorije koja se sastoji iz:
 - skupa osnovnih pojmova i simbola: skup, broj 1 i (unarna operacija) sledbenik, u oznaci '
 - skupa aksioma
 - skupa pravila izvođenja - zakona dokazivanja
 - stavova kojima se nešto tvrdi i čije tvrđenje treba dokazati (teoreme) - skupa formula

12



PEANOVA ARITMETIKA

11

AKSIOMATSKO ZASNIIVANJE SKUPA PRIRODNIH BROJEVA

- 1 je prirodan broj.
- Svaki prirodan broj n ima svoj sledeći broj - **sledbenik** n' . $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists n' \in \mathbb{N})(n' = n + 1)$
- Broj 1 nije sledbenik nijednog prirodnog broja.
- Svaki prirodan broj je sledbenik najviše jednog prirodnog broja. $(\forall n, m \in \mathbb{N})(n' = m' \Rightarrow n = m)$
- Aksioma indukcije:**
Svaki podskup M skupa prirodnih brojeva, koji sadrži broj 1 i sledbenik svakog svog elementa jednak je skupu $\mathbb{N}$.

13

PRINCIP MATEMATIČKE INDUKCIJE

$S(n)$ - neko svojstvo, stav u skupu prirodnih brojeva
Dokaz indukcijom da je $S(n)$ tačno za sve n iz $\mathbb{N}$ sastoji se iz tri koraka:

- Provera da je tvđenje tačno za neko $n=k$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.
 $n=k$ je najmanji prirodan broj za koje je tvđenje tačno i naziva se **indukcijska baza**.
- Indukcijska pretpostavka:
 $\tau(S(m)) = T$, za neko $m > k$, $m \in \mathbb{N}$.
- Indukcijski korak:
Proveravamo istinitost implikacije $S(m) \Rightarrow S(m')$.
Ako je $\tau(S(m) \Rightarrow S(m')) = T$ sledi
 $(\forall n \in \mathbb{N}) S(n)$ je tačno.

14

RELACIJA „<“, U PEANOVOJ ARITMETICI $(\mathbb{N}, +, \cdot, ', \leq)$

- U skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, relaciju " $<$ " definišemo sa:
" $<$ " : $n < m \Leftrightarrow n$ je strogo manji od m
 $\Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N}) n + p = m$, $n, m \in \mathbb{N}$.
- $m > n \Leftrightarrow m$ je strogo veći od $n \Leftrightarrow n < m$
- $\neg(n < m) \Leftrightarrow (n > m \vee m = n) \Leftrightarrow n \geq m$

15

OPERACIJA SABIRANJA U PEANOVOJ ARITMETICI $(\mathbb{N}, +, \cdot, ', \leq)$

Definiše se kao preslikavanje $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sa svojstvima:

$$(S_1) (\forall n \in \mathbb{N}) n + 1 = n' \quad \text{def}$$

$$(S_2) (\forall n, m \in \mathbb{N}) n + m' = (n + m)' \quad \text{def}$$

16

ZAKONI OPERACIJE SABIRANJA (TEOREME) U PEANOVOJ ARITMETICI

- (T₁) zakon zatvorenosti skupa $\mathbb{N}$ u odnosu na operaciju sabiranja
 $(\forall n, m \in \mathbb{N}) n + m \in \mathbb{N}$
- (T₂) zakon asocijativnosti
 $(\forall n, m, p \in \mathbb{N}) (n + m) + p = n + (m + p)$
- (T₃) zakon komutativnosti
 $(\forall n, m \in \mathbb{N}) n + m = m + n$
- (T₄) zakon kancelacije
 $(\forall n, m, p \in \mathbb{N}) (n + p = m + p \Rightarrow n = m)$
- (T₅) zakon trihotomije
 $(\forall n, m \in \mathbb{N}) (n = m \vee n < m \vee n > m)$

17

OPERACIJA MNOŽENJA U PEANOVOJ ARITMETICI $(\mathbb{N}, +, \cdot, ', \leq)$

Definiše se kao preslikavanje $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sa svojstvima:

$$(M_1) (\forall n \in \mathbb{N}) n \cdot 1 = n \quad \text{def}$$

$$(M_2) (\forall n, m \in \mathbb{N}) n \cdot m' = n \cdot m + n \quad \text{def}$$

18

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

ZAKONI OPERACIJE MNOŽENJA (TEOREME) U PEANOVOJ ARITMETICI

(T₁') zakon zatvorenosti operacije množenja

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) n \cdot m \in \mathbb{N}$$

(T₂') zakon asocijativnosti

$$(\forall n, m, p \in \mathbb{N}) (n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$$

(T₃') zakon komutativnosti

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) n \cdot m = m \cdot n$$

(T₄') zakon kancelacije

$$(\forall n, m, p \in \mathbb{N}) (n \cdot p = m \cdot p \Rightarrow n = m)$$

19

DISTRIBUTIVNOST MNOŽENJA U ODNOSU NA SABIRANJE

(T₆) zakon distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje

$$(\forall n, m, p \in \mathbb{N}) (n + m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p$$

20

OPERACIJE ODUZIMANJA I DELJENJA U PEANOVOJ ARITMETICI

- $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da $n > m$

Operacije oduzimanja i deljenja se uslovno definišu sa:

- Prirodan broj p je **razlika** brojeva n i m , u oznaci $p = n - m$, ako i samo ako je $n = p + m$.

$$p = n - m \Leftrightarrow n = p + m$$
- Prirodan broj q je **količnik** brojeva n i m , u oznaci $q = n : m$, ako i samo ako je $n = q \cdot m$.

$$q = n : m \Leftrightarrow n = q \cdot m$$

21

ZAPIS PRIRODNIH BROJEVA. BROJEVNI SISTEMI

22

ZAPISIVANJE PRIRODNIH BROJEVA

- Pomoću simbola, koje nazivamo ciframa
- Koriste se različiti sistemi brojeva: nepozicioni i pozicioni
- nepozicioni brojevnici sistemi: vrednost cifre ne zavisi od njene pozicije u zapisu broja (stari narodi Egipta, Vavilona, Grčke, Rima...)

23

CIFRE RIMSKOG BROJEVNOG SISTEMA

- Napomena: nadvučen simbol dobija hiljadu puta veću vrednost

Simboli cifara	Dekadna vrednost
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

24

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

BROJEVNA VREDNOST CIFRE U RIMSKOM BROJEVNOM SISTEMU

- Niz istih cifara predstavlja brojevu vrednost jednaku njihovom zbiru (primer II).
- Dve cifre od kojih se manja nalazi levo od veće, predstavljaju brojevu vrednost jednaku razlici veće i manje cifre (primer IX).
- Dve cifre od kojih se manja nalazi desno od veće, predstavljaju brojevu vrednost jednaku zbiru veće i manje cifre (primer XII).

25

POZICIONI BROJEVNI SISTEMI

- U zapisu broja svaka cifra ima dvostruku ulogu: brojevu vrednost i pozicionu vrednost
- Dekadni brojevni sistem - opšte prihvaćen brojevni sistem za zapis realnih brojeva, odatle i prirodnih brojeva
- Binarni brojevni sistem - značajan u računarstvu

26

DEKADNI BROJEVNI SISTEM

- deset cifara: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (koje nazivamo **arapskim** ciframa)
- dekadni zapis prirodnog broja:
 $n = n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0, n \in \mathbb{N}$
 $n_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, i = 0,1, \dots, k, n_k \neq 0$
 čija je vrednost je
 $n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10^1 + n_0$

Primer:

$$5376 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6$$

27

BINARNI BROJEVNI SISTEM

- dve cifre: 0,1
- binarni zapis prirodnog broja:
 $n_2 = m_k m_{k-1} \dots m_1 m_0, n \in \mathbb{N},$
 $m_i \in \{0,1\}, i = 0,1, \dots, k, m_k \neq 0$

čija je vrednost u dekadnom brojevnom sistemu:

$$n_2 = m_k \cdot 2^k + m_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \dots + m_1 \cdot 2^1 + m_0 = n_{10}$$

- Primer binarnog zapisa prirodnog broja

$$1100 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0$$

koji u dekadnom brojevnom sistemu ima vrednost

$$(1100) = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 = (12)$$

28

OPERACIJE SABIRANJA I MNOŽENJA U SKUPU M_2

- $M_2 = \{0,1\}$
- sabiranje po modulu 2, u oznaci $+_2$
- množenje po modulu 2, u oznaci $*_2$

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

29

PROŠIRENJE SKUPA PRIRODNIH BROJEVA

I deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

SKUP CELIH BROJEVA

- Skup prirodnih brojeva nije zatvoren u odnosu na operaciju oduzimanja.
- Odatle na primer, jednačina oblika $x+n=m$, $n, m \in \mathbb{N}$, nema rešenje u skupu prirodnih brojeva ako je $m \leq n$.
- Skup prirodnih brojeva se proširuje na skup celih brojeva, u oznaci:
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Skup celih brojeva je zatvoren u odnosu na operacije sabiranja, množenja i oduzimanja.
- Ceo broj b je sadržalac celog broja a ako postoji ceo broj m , tako da je $b=am$.

31

SKUP RACIONALNIH BROJEVA

- Skup celih brojeva nije zatvoren u odnosu na operaciju deljenja.
- Odatle na primer, jednačina oblika $ax=b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, nema rešenje u skupu celih brojeva ako ceo broj b nije sadržalac celog broja a .
- Skup celih brojeva se proširuje na skup racionalnih brojeva, u oznaci:
 $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
- $q \in \mathbb{N}$ znači da je $q > 0$.
- Skup racionalnih brojeva je zatvoren u odnosu na operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja.

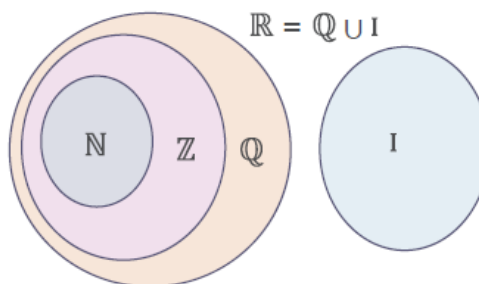
32

SKUP REALNIH BROJEVA

- Iako je skup racionalnih brojeva zatvoren u odnosu na operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja, još stari Grci su приметili da dužina dijagonale kvadrata stranice dužine 1 nije racionalan broj, odnosno da jednačina oblika $d^2=2$ nema rešenje u skupu racionalnih brojeva.
- Pomenuta jednačina ima rešenje u tzv. skupu iracionalnih brojeva, koji obuhvata brojeve kao što su $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{9}$, π , e , $\log 3$ itd.
- Unija racionalnih i iracionalnih brojeva obrazuje skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.

33

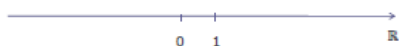
ODNOS SKUPA PRIRODNIH, CELIH, RACIONALNIH, IRACIONALNIH I REALNIH BROJEVA



34

REALNA PRAVA

- Svakoј tački brojeвне prave odgovara tačno jedan realan broj i obratno, svakom realnom broju odgovara tačno jedna tačka brojeвне prave.
- U slučaju predstavljanja realnih brojeva na brojevnoj pravoj, zbog jednoznačne korespondencije između skupa realnih brojeva i tačaka brojeвне prave, brojeвна prava se naziva realna prava.



35

INTERVALI – PODSKUPOVI SKUPA REALNIH BROJEVA

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
- Otvoren interval:
 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- Poluotvoren interval sa desne strane:
 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- Poluzatvoren interval sa desne strane:
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- Zatvoren interval ili segment:
 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

36

II DEO

4. **Merenje i broj**

- Mera na skupu
- Jedinica mere
- Merenje i merni broj
- Standardne merne jedinice - SI sistem mera i izvedene merne jedinice.

5. **Pojam i osnovne osobine verovatnoće**

- Eksperiment sa slučajnim ishodima. Slučajni događaji
- Statistička definicija verovatnoće
- Matematička definicija verovatnoće

6. **Pojam i izračunavanje verovatnoće**

- Klasična definicija verovatnoće
- Uslovne verovatnoće. Nezavisnost događaja
- Marginalne verovatnoće. Nezavisnost eksperimenata

7. **Kvantitativno izražavanje informacije – Šenonova teorija**

- Pojam entropije
- Uslovna entropija
- Uzajamna informacija

8. **Euklidska geometrija**

- Savremena euklidska geometrija
- Aksiome pripadanja
- Aksiome rasporeda
- Duž, poluprava, poluravan, poluprstor, konveksnost/konkavnost - definicije
- Aksiome podudarnosti. Posledice aksioma podudarnosti

9. **Euklidska geometrija**

- Kružnica i krug – definicija
- Sečica i tangenta – definicija
- Aksiome neprekidnosti
- Aksioma paralelnosti
- Paralelnost pravih - definicija
- Paralelnost prave i ravni - definicija
- Ugao i mnogougao - definicije
- Trougao
- Četvougao (paralelogram, pravougaonik, kvadrat, romb, trapez i deltoid)

10. **Euklidska geometrija**

- Diedar i rogalj - definicije
- Prosta poliedarska površ. Poliedar
- Prizma (paralelopiped, kvadar i kocka)
- Piramida (tetraedar, četvorostrana piramida)
- Pravilni poliedri - klasifikacija
- Nerogljava tela. Obrtna tela (valjak, kupa, lopta)

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače MATEMATIKA  4. MERENJE I BROJ Predavač: mr Tatjana Bajić	SIGMA-POLJE - Neka je S neprazan skup, koji može biti konačan, prebrojiv ili neprebrojiv. - Klasu podskupova skupa S, u oznaci F, nazivamo sigma-polje ako zadovoljava sledeće: - Skup S pripada klasi F. - Ako podskup A skupa S pripada klasi F tada njegov komplement A^c takođe pripada F. - Ako niz podskupova $A_1, A_2, A_3, \dots$ skupa S pripada klasi F, tada njihova unija takođe pripada klasi F. 2
POSLEDICE DEFINICIJE SIGMA-POLJA - Ako je F sigma-polje podskupova skupa S, tada: - Prazan skup pripada sigma-polju F. - Ako podskupovi A i B skupa S pripadaju sigma-polju F, tada njihova unija takođe pripada sigma-polju F. - Ako niz podskupova $A_1, A_2, A_3, \dots$ skupa S pripada sigma-polju F, tada njihov presek takođe pripada sigma-polju F. - Ako podskupovi A i B skupa S pripadaju sigma-polju F, tada njihov presek takođe pripada sigma-polju F. 3	DEFINICIJA MERE - Neka je S neprazan skup i F sigma-polje podskupova skupa S. - Označimo sa $R_0^+ = [0, +\infty)$ skup nenegativnih realnih brojeva. - Funkcija $m : F \rightarrow R_0^+$ je mera na sigma-polju F podskupova skupa S ako zadovoljava sledeća svojstva: $m(\emptyset) = 0$ - Ako je $A_1, A_2, A_3, \dots$ niz disjunktnih podskupova iz sigma-polja F, tada $m(\cup A_i) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + \dots$ 4
PARTITIVNI SKUP - Na jednom istom skupu možemo razmatrati različita sigma-polja. - Posebno, ako je S neki skup, tada partitivni skup od S, u oznaci $\mathcal{P}(S)$, je jedno sigma-polje podskupova skupa S. - Polazeći od te činjenice i uzimajući u obzir cilj ovog izlaganja, meru na skupu S detaljnije ćemo definisati na odgovarajućem partitivnom skupu od S, odnosno na $\mathcal{P}(S)$. 5	MERA NA SKUPU Neka je $\mathcal{P}(S)$ partitivni skup skupa S. Mera na skupu S je funkcija $m : \mathcal{P}(S) \rightarrow R_0^+$ definisana na $\mathcal{P}(S)$ koje zadovoljava sledeće uslove: $(\forall A \in \mathcal{P}(S)) m(A) \geq 0$ $(\exists A_0 \in \mathcal{P}(S)) m(A_0) = 1$ $(\forall A, B \in \mathcal{P}(S)) (A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B))$ $(\forall A, B \in \mathcal{P}(S)) (A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B))$ Broj $m(A)$ se naziva merni broj skupa A, $A \in \mathcal{P}(S)$. 6

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

JEDINICA MERE

- o Jedinica mere (merna jedinica) neke fizičke veličine je izabrana veličina iste vrste, tako da njen merni broj iznosi 1.

Primeri:

- o Jedinica mere za dužinu je jedinična duž;
- o jedinica mere za masu je jedinična masa;
- o jedinica mere za zapreminu je jedinična zapremina;
- o jedinica mere za vreme je jedinično vreme i sl.

7

NAZIVI MERNIH JEDINICA

- o Svakoj mernoj jedinici neke fizičke veličine pridružuje se jedinstven naziv po kome je raspoznamo.

Veličina	Nazivi nekih mernih jedinica
dužina	pedalj, stopa, aršin, jard, milja, metar
površina	dulum, jutro, kvadratni metar
masa	funta, kilogram

8

MERENJE

- o Merenje je upoređivanje date fizičke veličine sa jedinicom mere te veličine.

Primeri:

- o duž se upoređuje sa jediničnom duži;
- o površ sa jediničnom površi;
- o zapremina sa jediničnom zapreminom;
- o masa sa jediničnom masom i sl.

9

MERNI BROJ.

PROBLEM IZBORA MERNE JEDINICE

- o Svaka fizička veličina se može meriti.
- o Rezultat merenja je merni broj veličine koja se meri.
- o Merni broj neke fizičke veličine pokazuje koliko se puta jedinica mere te veličine sadrži u fizičkoj veličini koja se meri.
- o U zavisnosti od izbora jedinice mere, jednoj te istoj fizičkoj veličini mogu se pridružiti različiti merni brojevi.
- o Problemi u ekonomskim odnosima usloveli su da 1960.god. dođe do dogovornog ujednačavanja mernih jedinica na globalnom nivou.

10

SISTEM MERA

- o Jedinica mere neke fizičke veličine treba da bude tako izabrana da ne zavisi od toga ko meri i gde se meri.
- o Jedinica mere neke fizičke veličine jednoznačno određuje merni broj bilo koje fizičke veličine te vrste.
- o Skup mernih jedinica svih osnovnih fizičkih veličina predstavlja sistem mera.
- o Opšteprihvaćeni sistem mera sa ujednačenim mernim jedinicama je metrički sistem i naziva se SI-sistem (Sistem International D'Unites).

11

SI-SISTEM

- o SI-sistem se sastoji od sedam osnovnih mernih jedinica i dve dopunske.
- o Za merne jedinice SI-sistema kažemo da su standardne merne jedinice.
- o Sve ostale merne jedinice se mogu izvesti iz osnovnih, množenjem ili deljenjem dve ili više njih međusobno.

12

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

OSNOVNE MERNE JEDINICE

Naziv merne jedinice	Veličina koja se može meriti tom mernom jedinicom
metar	dužina
kilogram	masa
sekund	vreme
amper	jačina električne energije
kelvin	temperatura
kandel	jačina svetlosti
mol	količina materije

13

DOPUNSKE MERNE JEDINICE

Naziv merne jedinice	Veličina koja se može meriti tom mernom jedinicom
radijanj	ugao u ravni
steradijanj	ugao u prostoru

14

MASA. TEŽINA

- o Merna jedinica za merenje mase je 1kg (kilogram).
- o 1 kilogram je masa međunarodnog etalona od iridijuma i platine koji se čuva u Sevrju kod Pariza.
- o 1 kilogram nije jedinica mere za merenje težine!!!
- Težina je sila kojom gravitacija deluje na masu i odatle je merna jedinica za merenje težine jednaka $1\text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2 = 1\text{N}$.
- Merna jedinica za merenje težine je 1N (1 njutn), odnosno 1 kilopond (stara mera).

15

5.1 POJAM VEROVATNOĆE

- Eksperiment sa slučajnim ishodima
- Slučajan događaj
- Verovatnoća slučajnog događaja

Predavač: mr Tatjana Bajić

TEORIJA VEROVATNOĆA

- U masovnim pojavama, koje poseduju varijabilne osobine, objektivno je prisutna slučajnost.
- Međutim, pojedini događaji se u uslovima neizvesnosti realizuju sa relativno stabilnom frekvencijom što ukazuje da se prisutna slučajnost može kvantitativno meriti.
- Teorija verovatnoća se bavi matematičkom analizom slučajnih pojava i predstavlja teorijsku podlogu Matematičkoj statistici, a posledično i Primenjenoj statistici kao njenom primenom u rešavanju konkretnih, realnih problema.
- U Teoriji verovatnoća, događaji koji se realizuju u uslovima neizvesnosti sa skoro stabilnom frekvencijom opisuju se pomoću eksperimenta sa slučajnim ishodima.

EKSPERIMENT SA SLUČAJNIM ISHODIMA. SLUČAJAN DOGAĐAJ

EKSPERIMENT - DEFINICIJA

- **Definicija 1** Eksperiment je takav proces da kad se sprovede, dobijeni rezultat je jedna i samo jedna od više mogućih njegovih realizacija.
- Eksperimente označavamo malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma \dots$
- Rezultat eksperimenta nazivamo ishodom.
- Skup svih logički mogućih ishoda nekog eksperimenta obeležavamo sa S .
- Na primer, u slučaju konačnog skupa svih mogućih ishoda,

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

PRIMER 1 EKSPERIMENT SA SLUČAJNIM ISHODIMA

- Eksperiment se sastoji u slučajnom izboru studenta iz grupe studenata koji su polagali ispit iz nekog predmeta i kao ishod registruje se da li je položio ispit ili ne.
- Pod slučajnim izborom studenta podrazumevamo takav izbor da svaki student, iz grupe studenata koji su polagali ispit, ima podjednaku šansu da bude izabran.
- Na taj način su stvoreni uslovi da nemamo nikakvo prethodno saznanje o tome da li je izabrani student položio ispit ili ne, što znači da svaki od dva moguća ishoda eksperimenta, „položio ispit“ ili „nije položio ispit“ može da se realizuje, ali i ne mora, odnosno slučajni su.
- Posledično, dobijen odgovor biće novina, odnosno informacija za osobu koja ispituje.

EKSPERIMENT SA SLUČAJNIM ISHODIMA (SLUČAJNI EKSPERIMENT)

- Jedan eksperiment može se sprovesti pod različitim uslovima.
 - Na primer, ako bismo u Primeru 1 slučajno birali studenta iz grupe studenata koji su položili ispit iz nekog predmeta, tada bi ishod unapred bio poznat, odnosno bio bi deterministički: položio ispit, što nam nije od značaja.
- Odatle, u Teoriji verovatnoća zanimaju nas eksperimenti:
 - koji mogu da se ponavljaju proizvoljan broj puta pod skoro istim okolnostima i to takvim da dovode do slučajnih ishoda, odnosno ishod pojedinačnog eksperimenta nije unapred poznat;
 - prethodno je definisano šta se registruje kao ishod eksperimenta pri čemu se skup svih mogućih ishoda može unapred opisati;
- Takve eksperimente nazivamo eksperimenti sa slučajnim ishodima ili slučajni eksperimenti.

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

SKUP SVIH MOGUĆIH SLUČAJNIH ISHODA

- U opisu jednog eksperimenta, pored navođenja uslova, treba tačno navesti šta se registruje kao njegov ishod.
- Primer 2** Kod slučajno izabranog studenta, iz grupe studenata koji su polagali ispit iz nekog predmeta, možemo registrovati:
 - da li je položio ispit iz tog predmeta ili ne
 - koju je završnu ocenu ostvario na ispitu iz tog predmeta
 - koliko vremenski dugo je polagao ispit, itd.
- Tada, skup svih mogućih slučajnih ishoda posmatranog eksperimenta je
 - u prvom slučaju $S = \{\text{položio ispit, nije položio ispit}\}$,
 - u drugom $S = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
 - a u trećem, ako je ispit na primer trajao maksimalno 90 minuta, onda je reč o intervalu $S = [0, 90]$.

7

ZANIMLJIV PRIMER SLUČAJNOG EKSPERIMENTA

- Primer 3** Dete nasumično izvlači lutku iz neprovidne vreće sa lutkama istih veličina i oblika, ali različitih boja kose: *plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa i crvenokosa*.
- Ako kao ishod eksperimenta registrujemo boju kose lutke koju je dete slučajno izvuklo, tada skup svih mogućih slučajnih ishoda je $S = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$.
- Uopšteno:** Slučajni izbor elementa iz nekog skupa predstavlja jedan opšti primer slučajnog eksperimenta,
 - ako se može ponavljati pod skoro istim okolnostima proizvoljan broj puta;
 - ako je definisano šta se registruje kao ishod kod slučajno izabranog elementa, pri čemu se skup svih mogućih ishoda može unapred opisati;
 - ako unapred nije poznat ishod koji se registruje kod slučajno izabranog elementa.

8

KLASIČNI PRIMERI SLUČAJNIH EKSPERIMENTA

- Primer 4** Eksperiment se sastoji u bacanju "fer" novčića i kao ishod se registruje da li je palo pismo ili grb. Tada je skup svih mogućih slučajnih ishoda $S = \{\text{pismo, grb}\}$.
- Primer 5** Eksperiment se sastoji u bacanju homogene kocke za igru i kao ishod se registruje broj koji je pao. Tada je skup svih mogućih slučajnih ishoda $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Napomena:** U daljem izlaganju pod pojmom eksperimenta podrazumevamo isključivo slučajni eksperiment, a skup svih mogućih slučajnih ishoda S nazivamo kraće skup svih mogućih ishoda ili skup svih ishoda.

9

SLUČAJAN DOGAĐAJ

- Neka je skup svih mogućih ishoda $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ nekog slučajnog eksperimenta konačan skup.
- Definicija 2** Podskup skupa svih mogućih ishoda nekog slučajnog eksperimenta naziva se slučajan događaj ili kraće samo događaj.
- Ishodi e_k , kao jednočlani podskupovi $E_k = \{e_k\}$ od S , su takođe slučajni događaji koje nazivamo elementarni slučajni događaji.
- Na primer, slučajan događaj $A = \{\text{"završna ocena studenta na ispitu je veća od 7"}\}$ predstavlja podskup $A = \{8, 9, 10\}$ skupa svih mogućih ishoda $S = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- Pošto je S konačan skup, slučajni događaji odgovarajućeg eksperimenta su elementi partitivnog skupa od S , u oznaci $\mathcal{P}(S)$.

10

REALIZACIJA SLUČAJNOG DOGAĐAJA

- Neka je $A = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\} \subset S$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, proizvoljan slučajan događaj.
- Za događaj A kažemo da se realizovao ako se realizovao bar jedan od ishoda $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$.
- Ishodi $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ se nazivaju povoljnim ishodima za događaj A .
- Skup svih mogućih ishoda S se uvek realizuje i zbog toga se S naziva siguran događaj.
- Događaj koji se nikada ne realizuje, označava se sa $\emptyset$ (prazan skup, $\emptyset \subset S$) i naziva se nemoguć događaj.

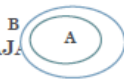
11

PRIMERI REALIZACIJE SLUČAJNOG DOGAĐAJA

- Na primer, u Primeru 3, gde je skup svih mogućih ishoda $S = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$,
 - događaj $S = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$ se realizuje ako dete izvuče bilo koju lutku, a pošto će dete sigurno izvući neku lutku iz vreće, onda je skup svih mogućih ishoda S događaj koji se uvek realizuje i odatle naziva se siguran događaj;
 - događaj $A = \{\text{ridokosa, smeđokosa}\}$ se realizuje ako dete nasumično izvuče *ridokosu* ili *smeđokosu* lutku;
 - a zelenokosu lutku nikad ne može izvući, te događaj kao što je $\{\text{zelenokosa}\}$ je nemoguć događaj i označavamo ga jednim simbolom - $\emptyset$.

12

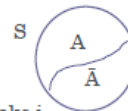
INKLUZIJA DVA SLUČAJNA DOGAĐAJA



- o **Definicija 3** Ako svaka realizacija događaja A implicira (povlači) realizaciju događaja B, tada događaj A implicira (povlači) događaj B. U tom slučaju kažemo da su događaji A i B u inkluziji što označavamo sa $A \subset B$.
- o Ako događaj A implicira (povlači) događaj B, to u skupovnom smislu znači da je A podskup skupa B, što označavamo sa $A \subset B$.
- o Na primer, u Primeru 3, gde je $S = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$,
 - događaj $A = \{\text{ridokosa, smeđokosa}\}$ povlači realizaciju
 - događaja $B = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa}\}$
 jer očigledno je $A \subset B$ i ako se realizuje događaj A, odnosno dete nasumično izvuče *ridokosu* ili *smeđokosu* lutku iz neprovidne vreće, to znači da se istovremeno realizovao i događaj B.

13

SUPROTAN DOGAĐAJ



- o **Definicija 4** Događaj $\bar{A}$ koji se realizuje ako i samo ako se događaj A ne realizuje jeste komplement događaja A koga nazivamo suprotan događaj događaju A.
- o Suprotan događaj $\bar{A}$ događaju A je takav podskup skupa svih mogućih ishoda S koji sadrži sve one ishode koji ne pripadaju skupu A, odnosno $\bar{A} = S \setminus A$ i $A \cup \bar{A} = S$.
- o Na primer, suprotan događaj događaju $A = \{\text{ridokosa, smeđokosa}\}$ u Primeru 3, gde je $S = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$, je događaj $\bar{A} = \{\text{plavokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$.

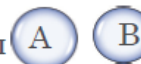
14

PRESEK I UNIJA SLUČAJNIH DOGAĐAJA

- o **Definicija 5** Događaj koji se realizuje ako se realizuje i događaj A i događaj B je presek događaja A i B, u oznaci $A \cap B$ ili kraće AB.
- o Za presek događaja se često kaže i proizvod događaja.
- o **Definicija 6** Događaj koji se realizuje ako se realizuje bar jedan od događaja A i B je unija događaja A i B, u oznaci $A \cup B$.
- o Na primer, u Primeru 3, gde je $S = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$,
 - događaj $C = \{\text{ridokosa, smeđokosa}\}$ je presek, a
 - događaj $D = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa}\}$ je unija događaja $A = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa}\}$ i događaja $B = \{\text{ridokosa, smeđokosa, crnokosa}\}$.

15

DISJUNKTNI SLUČAJNI DOGAĐAJI

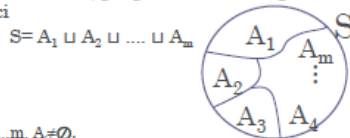


- o **Definicija 7** Dva događaja A i B nekog eksperimenta se uzajamno isključuju ako ne mogu istovremeno da se realizuju.
- o U skupovnom smislu to znači da su A i B disjunktne podskupovi skupa svih mogućih ishoda S, odnosno $A \cap B = \emptyset$, i zbog toga se nazivaju i disjunktne događaji.
- o Na primer, u Primeru 3, gde je $S = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$,
 - događaji $A = \{\text{ridokosa, smeđokosa}\}$ i $B = \{\text{plavokosa, crnokosa}\}$ se uzajamno isključuju jer se ne mogu istovremeno realizovati.
 - posebno, događaj $A = \{\text{ridokosa, smeđokosa}\}$ i njemu suprotan događaj $\bar{A} = \{\text{plavokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$ se takođe uzajamno isključuju.
- o Međutim, za razliku od događaja A i B, gde $A \cup B \neq S$, za događaje A i $\bar{A}$ dodatno važi $A \cup \bar{A} = S$.

16

POTPUNO RAZLAGANJE SIGURNOG DOGAĐAJA

- o **Definicija 8** Niz događaja $A_j, j=1,2,\dots,m$, nekog eksperimenta sa skupom mogućih ishoda S, potpuno razlaže siguran događaj S, u oznaci



ako važi:

1. Za svako $j=1,2,\dots,m, A_j \neq \emptyset$.
 2. Događaji $A_j, j=1,2,\dots,m$, se uzajamno isključuju, odnosno $A_i \cap A_j = \emptyset$ za svako $i \neq j$.
 3. Siguran događaj S se može predstaviti kao unija niza događaja $A_j, j=1,2,\dots,m$, odnosno $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$.
- o Posebno, elementarni događaji $E_k = \{e_k\}$ nekog eksperimenta sa skupom mogućih ishoda $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uvek potpuno razlažu siguran događaj S.

17

- o **Primer 6** Neka je B eksperiment u kome dete nasumice izvlači lutku iz neprovidne vreće u kojoj je 20 lutaka:

2 plavokose, 3 ridokose, 4 smeđokose, 5 crnokosih i 6 crvenokosih.

- o Ako lutke iste boje kose razlikujemo po boji haljinice koju nosi, a kao ishod eksperimenta registrujemo boju kose i boju haljinice izvučene lutke, tada, skup mogućih ishoda eksperimenta B ima ukupno 20 ishoda, na primer, $S_B = \{\text{plavokosa u beloj haljinici, plavokosa u roze haljinici, ridokosa u zelenoj haljinici, ridokosa u žutoj haljinici, ridokosa u crvenoj haljinici, smeđokosa u beloj haljinici, smeđokosa u crvenoj haljinici, smeđokosa u roze haljinici, smeđokosa u žutoj haljinici, crnokosa u beloj haljinici, crnokosa u crvenoj haljinici, crnokosa u plavoj haljinici, crvenokosa u beloj haljinici, crvenokosa u žutoj haljinici, crvenokosa u roze haljinici, crvenokosa u crnoj haljinici, crvenokosa u plavoj haljinici, crvenokosa u zelenoj haljinici}\}$.

18

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

o Tada su sledeći događaji,

- **Plavokosa** = {plavokosa sa belom haljinicom, plavokosa sa roze haljinicom}
- **Ridokosa** = {ridokosa u zelenoj haljinici, ridokosa u žutoj haljinici, ridokosa u crvenoj haljinici}
- **Smeđokosa** = {smeđokosa u beloj haljinici, smeđokosa u crvenoj haljinici, smeđokosa u roze haljinici, smeđokosa u žutoj haljinici}
- **Crnokosa** = {crnokosa u beloj haljinici, crnokosa u crvenoj haljinici, crnokosa u roze haljinici, crnokosa u žutoj haljinici, crnokosa u plavoj haljinici}
- **Crvenokosa** = {crvenokosa u beloj haljinici, crvenokosa u žutoj haljinici, crvenokosa u roze haljinici, crvenokosa u crnoj haljinici, crvenokosa u plavoj haljinici, crvenokosa u zelenoj haljinici}

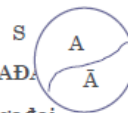
takvi da je

$$S_p = \text{Plavokosa} \cup \text{Ridokosa} \cup \text{Smeđokosa} \cup \text{Crnokosa} \cup \text{Crvenokosa}$$

odnosno potpuno razlažu siguran događaj S_p .

19

DOGAĐAJ I NJEMU SUPROTAN DOGAĐAJ



- o Posebno, događaj i njemu suprotan događaj uvek potpuno razlažu siguran događaj posmatranog eksperimenta.
- o Na primer, u Primeru 6,
 - $\text{Plavokosa} = \{\text{plavokosa sa belom haljinicom, plavokosa sa roze haljinicom}\}$ i
 - njemu suprotan događaj $\text{Neplavokosa} = S_p \setminus \text{Plavokosa}$ takođe potpuno razlažu siguran događaj S_p , odnosno $S_p = \text{Plavokosa} \cup \text{Neplavokosa}$.

20

VEROVATNOĆA REALIZACIJE SLUČAJNOG DOGAĐAJA

21

VEROVATNOĆA REALIZACIJE SLUČAJNOG DOGAĐAJA – INTUITIVNI PRILAZ

- o Budući da se pojedini događaji u masovnim pojavama realizuju sa relativno stabilnom frekvencijom otvara se mogućnost kvantitativnog merenja slučajnosti.
- o Numerička mera šanse da se neki događaj realizuje u postojećim uslovima neizvesnosti naziva se verovatnoća realizacije slučajnog događaja.
- o Verovatnoću realizacije slučajnog događaja kraće nazivamo verovatnoća slučajnog događaja ili samo verovatnoća događaja.

22

PONAVLJANJE EKSPERIMENTA

- o U teoriji verovatnoća, događaje koji se u uslovima neizvesnosti realizuju sa relativno stabilnom frekvencijom opisujemo pomoću eksperimenta sa slučajnim ishodima.
- o Odatle, u cilju određivanja verovatnoće realizacije nekog slučajnog događaja, prvo je potrebno definisati odgovarajući eksperiment sa slučajnim ishodima.
- o Eksperiment sa slučajnim ishodima može se ponavljati pod skoro istim uslovima neograničen broj puta tako da u svakom ponavljanju možemo registrovati da li se posmatrani događaj realizovao ili ne.
- o U vezi sa tim uvode se pojmovi apsolutne i relativne frekvencije (realizacije) slučajnog događaja.

23

APSOLUTNA I RELATIVNA FREKVENCIJA (REALIZACIJE) SLUČAJNOG DOGAĐAJA

- o Neka je $A \subseteq S$ slučajan događaj nekog eksperimenta α .
- o Pretpostavimo da se u neizmenjenim uslovima, eksperiment α ponavi N puta i da se pri tome događaj A realizovao $N(A)$ puta, $0 \leq N(A) \leq N$.
- o Broj $N(A)$ se naziva apsolutna frekvencija događaja A , a broj $N(A)/N$ je relativna frekvencija događaja A .
- o Pretpostavimo u Primeru 3 da dete $N=100$ puta nasumice, sa vraćanjem, izvlači lutku iz neprovidne vreće u kojoj je 5 lutaka istih veličina i oblika, ali različitih boja kose. Ako dete $N(E_p)=21$ put izvuče plavokosu lutku u 100 izvlačenja, tada kažemo da je 21 apsolutna frekvencija, a $21/100=0.21$ relativna frekvencija realizacije elementarnog događaja $E_p = \{\text{plavokosa}\}$: "Dete je izvuklo plavokosu lutku iz vreće"

24

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

ZAKON VELIKIH BROJEVA. STATISTIČKA DEFINICIJA VEROVATNOĆE

- o Zakon velikih brojeva: Ako se uvećava broj N ponavljanja nekog eksperimenta, koji se sprovode nezavisno jedan od drugog i pod istim uslovima, tada se relativna frekvencija $N(A)/N$ bilo kog događaja A posmatranog eksperimenta grupiše oko određene vrednosti.

Statistička definicija verovatnoće

- o Vrednost oko koje se grupiše relativna frekvencija $N(A)/N$ događaja A , kada se broj N ponavljanja odgovarajućeg eksperimenta neograničeno uvećava, predstavlja verovatnoću realizacije događaja A .
- o Verovatnoću realizacije nekog događaja A označavaćemo sa $P(A)$.

ODREĐIVANJE VEROVATNOĆE DOGAĐAJA

- o U primeni, ako se neki eksperiment pod istim okolnostima ponovi N puta, gde je N dovoljno veliki broj, tada se za verovatnoću realizacije slučajnog događaja A uzima relativna frekvencija posmatranog događaja A , odnosno $P(A) \approx N(A)/N$.
- o Uzimajući u obzir da je N konačan broj, relativna frekvencija $N(A)/N$ događaja A zapravo predstavlja aproksimaciju prave (teorijske) vrednosti verovatnoće $P(A)$.
- o U prethodnoj verziji Primera 3:
 - Relativna frekvencija elementarnog događaja E_p „plavokosa”: „Dete je izvuklo plavokosu lutku iz vreće” iznosi $21/100 \approx 0.21$.
 - Međutim, kada bismo broj ponavljanja eksperimenta N uvećavali, dobili bismo da se relativna frekvencija događaja E_p grupiše oko vrednosti 0.20, što odgovara činjenici da svaka od 5 lutaka ima podjednaku šansu da bude izvučena. Odatle, za verovatnoću događaja E_p uzimamo vrednost $P(E_p)=0.20=1/5=20\%$.

VEROVATNOĆA SIGURNOG I NEMOGUĆEG DOGAĐAJA

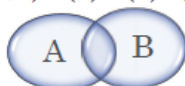
- o Neka je $S=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta.
- o Siguran događaj S , kao događaj koji se uvek realizuje, ima verovatnoću realizacije $P(S)=1$, odnosno 100%, i to je najveća vrednost verovatnoće realizacije nekog slučajnog događaja.
- o Nemoguć događaj $\emptyset$, kao događaj koji se nikad ne realizuje, ima verovatnoću realizacije $P(\emptyset)=0$, odnosno 0%, i to je najmanja vrednost verovatnoće realizacije nekog slučajnog događaja.
- o Odatle, $0 \leq P(A) \leq 1$, odnosno $0\% \leq P(A)100\% \leq 100\%$ za bilo koji slučajan događaj $A \subseteq S$.

ZAJEDNIČKA VEROVATNOĆA

- o Neka su A i B dva slučajna događaja nekog eksperimenta.
- o Verovatnoća preseka događaja A i B zove se zajednička verovatnoća i označava se sa $P(A \cap B)$ ili $P(AB)$.
- o Postoje dve mogućnosti:
 1. Ako je $A \cap B \neq \emptyset$, odnosno A i B nisu uzajamno isključivi događaji, tada $P(AB) > 0$.
 2. U suprotnom, ako su A i B uzajamno isključivi događaji (disjunktni događaji), odnosno $A \cap B = \emptyset$, tada $P(AB)=0$.

VEROVATNOĆA UNIJE DVA DOGAĐAJA KOJI NISU UZAJAMNO ISKLJUČIVI

- o Neka su A i B dva događaja koji nisu uzajamno isključivi, odnosno $A \cap B \neq \emptyset$.
- o Tada $P(AB) > 0$.
- o Događaj $A \cup B$ se realizuje ako se realizuje događaj A ili događaj B , te je verovatnoća događaja $A \cup B$ jednaka zbiru verovatnoća događaja A i B umanjena za zajedničku verovatnoću, odnosno $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.



VEROVATNOĆA UNIJE DVA UZAJAMNO ISKLJUČIVA DOGAĐAJA

- o Ako su A i B dva događaja koja se uzajamno isključuju, odnosno $A \cap B = \emptyset$, tada A i B se ne mogu istovremeno realizovati i $P(AB)=0$.
- o Odatle, događaj $A \cup B$ se realizuje ako se realizuje ili događaj A ili događaj B , te je verovatnoća događaja $A \cup B$ jednaka zbiru verovatnoća događaja A i B , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

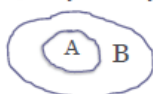
ODNOS VEROVATNOĆA DOGAĐAJA KOJI SU U INKLUZIJU

- Ako događaj A povlači događaj B, $A \subseteq B$, nekog eksperimenta sa skupom mogućih ishoda S, tada događaj B se može predstaviti kao

$$B = A \cup (\bar{A} \cap B)$$

pri čemu su događaji A i $\bar{A} \cap B$ disjunktni jer $A \cup \bar{A} = S$.

- Pošto je $A \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$, neposredno sledi $P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$.
- Kako je $P(\bar{A} \cap B) \geq 0$, dobijamo da je $P(A) \leq P(B)$.



31

ZBIR VEROVATNOĆA ELEMENTARNIH DOGAĐAJA

- Neka je $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta.
- Ako sa $E_j = \{e_j\}$, $j=1, 2, \dots, n$, označimo elementarne slučajne događaje, tada E_j , $j=1, 2, \dots, n$, kao uzajmno isključivi događaji, potpuno razlažu siguran događaj S, odnosno

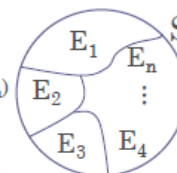
$$S = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$$

- Odatle,

$$P(S) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$$

- Kako uvek važi $P(S) = 1$, neposredno sledi da je

$$P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1.$$



32

VEROVATNOĆA SUPROTNOG DOGAĐAJA

- Uopšteno, ako niz događaja A_j , $j=1, 2, \dots, m$, nekog eksperimenta potpuno razlaže siguran događaj S, odnosno $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$, tada važi

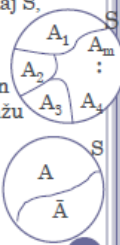
$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m) = 1.$$

- Posebno, slučajan događaj A i njemu suprotan događaj $\bar{A}$ nekog eksperimenta potpuno razlažu siguran događaj S, odnosno $A \cup \bar{A} = S$.

- Odatle, ako je $P(A)$ verovatnoća realizacije slučajnog događaja $A \subseteq S$, tada je verovatnoća realizacije njemu suprotnog događaja $\bar{A} \subseteq S$,

$$P(\bar{A}) = P(S \setminus A) = P(S) - P(A) = 1 - P(A),$$

jer $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.



33

DEFINICIJA 9.1

MATEMATIČKA DEFINICIJA VEROVATNOĆE - EKSPERIMENT SA KONAČNO MNOGO ISHODA

- Neka je $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, skup svih mogućih ishoda eksperimenta α i $\mathcal{P}(S)$ partitivni skup skupa S.
- Ako sa $P(E_j)$, $j=1, 2, \dots, n$, označimo verovatnoće elementarnih događaja $E_j = \{e_j\}$, $j=1, 2, \dots, n$, eksperimenta α , tako da:
 - Za svako $j=1, 2, \dots, n$, $P(E_j) \geq 0$ (nenegativnost);
 - $P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1$ (normiranost).
 tada verovatnoću proizvoljnog događaja $A = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, iz $\mathcal{P}(S)$ definišemo kao zbir verovatnoća elementarnih događaja povoljnih za događaj A, tj.

$$P(A) = P(E_{i_1}) + \dots + P(E_{i_k}).$$

34

DEFINICIJA 9.2

PROSTOR VEROVATNOĆA EKSPERIMENTA SA KONAČNO MNOGO ISHODA

- Neka je $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta i $\mathcal{P}(S)$ partitivni skup skupa S.
- Funkcija P definisana na $\mathcal{P}(S)$,
$$P: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty),$$
 naziva se verovatnosna mera ili verovatnoća ako važi:
 - Za svaki događaj A iz $\mathcal{P}(S)$, $P(A) \geq 0$. (nenegativnost)
 - $P(S) = 1$. (normiranost)
 - Ako je $A_1, A_2, A_3, \dots$ niz uzajmno isključivih događaja iz $\mathcal{P}(S)$, tako da
$$P(\cup_i A_i) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$
- Trojka $(S, \mathcal{P}(S), P)$ naziva se prostor verovatnoća ili verovatnosni model eksperimenta sa konačno mnogo ishoda.

35

OSNOVNA SVOJSTVA VEROVATNOĆE - REZIME

- Neka je $(S, \mathcal{P}(S), P)$ prostor verovatnoća eksperimenta sa konačno mnogo ishoda. Tada:
 - Verovatnoća sigurnog događaja S je $P(S) = 1$.
 - Verovatnoća nemogućeg događaja $\emptyset$ je $P(\emptyset) = 0$.
 - Za svaki događaj A iz $\mathcal{P}(S)$ važi: $0 \leq P(A) \leq 1$.
 - Za svaki događaj A iz $\mathcal{P}(S)$ važi: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
 - Ako je $A \cap B = \emptyset$, za neke događaje A i B iz $\mathcal{P}(S)$, tada je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
 - Ako je $A \cap B \neq \emptyset$, za neke događaje A i B iz $\mathcal{P}(S)$, onda je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
 - Ako je $A \subseteq B$, za neke događaje A i B iz $\mathcal{P}(S)$, onda je $P(A) \leq P(B)$.

36

5.2 POJAM VEROVATNOĆE

- Klasična definicija verovatnoće
- Uslovne verovatnoće
- Zajednička verovatnoća
- Nezavisnost događaja
- Marginalne verovatnoće
- Nezavisnost eksperimenata

Predavač: mr Tatjana Bajić

KLASIČNA DEFINICIJA VEROVATNOĆE

- U određenim situacijama za ishode $e_j \in S$, $j=1, \dots, n$, nekog eksperimenta α možemo unapred smatrati da su podjednako mogući, odnosno da su jednakoverovatni tj. da za $E_j = \{e_j\}$, $j=1, 2, \dots, n$, važi

$$P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_n) = 1/n.$$

- Tada za eksperiment α kažemo da je eksperiment sa jednakoverovratnim ishodima.

- Ako je $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta α sa jednakoverovratnim ishodima i

$$A = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\} \subseteq S$$

proizvoljan slučajni događaj posmatranog eksperimenta, gde je $k = n(A)$, $0 \leq k \leq n$, broj povoljnih ishoda za događaj A , tada verovatnoća realizacije događaja A je

$$P(A) = P(E_{i_1}) + \dots + P(E_{i_k}) = 1/n + \dots + 1/n = k/n = \text{card}(A)/\text{card}(S).$$

UOBIČAJNI PRIMERI EKSPERIMENTA SA JEDNAKOVEROVATNIM ISHODIMA

- Ako bacamo "fer" novčić i registrujemo da li je palo pismo ili grb, tada je skup mogućih ishoda $S = \{\text{pismo}, \text{grb}\}$ i ponavljanjem eksperimenta može se proveriti da je

$$P(\{\text{pismo}\}) = P(\{\text{grb}\}) = 1/2.$$

- Ako bacamo "homogenu" kocku za igru i registrujemo broj koji je pao, tada je skup mogućih ishoda $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i takođe ponavljanjem eksperimenta može se proveriti da je

$$P(E_k) = 1/6, \quad k=1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

gde je $E_k = \{k\}$ događaj da je pao broj k , $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

- Tada, verovatnoća realizacije slučajnog događaja

A : "pao je broj veći od 2", odnosno slučajnog događaja $A = \{3, 4, 5, 6\}$ je

$$P(A) = \text{card}(A)/\text{card}(S) = 4/6 = 2/3 = 0,666\dots = 66\%.$$

PRIMER 7

PRIMENA KLASIČNE DEFINICIJE VEROVATNOĆE

- α : Dete nasumično izvlači lutku iz neprovidne vreće u kojoj su lutke istih veličina i oblika, ali različitih boja kose.

- Ako kao ishod registrujemo boju kose izvučene lutke, tada, bez obzira na broj lutaka iste boje kose u vreći,

$$S_\alpha = \{\text{plavokosa}, \text{ridokosa}, \text{smedokosa}, \text{crnokosa}, \text{crvenokosa}\}.$$

- Međutim,

1. ako je u vreći 5 lutaka i to 1 plavokosa, 1 ridokosa, 1 smedokosa, 1 crnokosa i 1 crvenokosa, tada je

$$P(\{\text{plavokosa}\}) = P(\{\text{ridokosa}\}) = P(\{\text{smedokosa}\}) = P(\{\text{crnokosa}\}) = P(\{\text{crvenokosa}\}) = 1/5, \text{ tj. ishodi su jednakoverovatni.}$$

2. ako je u vreći 20 lutaka i to 2 plavokose, 3 ridokose, 4 smedokose, 5 crnokosih i 6 crvenokosih, tada ne možemo smatrati da su ishodi plavokosa, ridokosa, smedokosa, crnokosa i crvenokosa jednakoverovatni, ali određivanje verovatnoća ishoda takođe se zasniva na klasičnoj definiciji verovatnoća.

PRIMER 7 OBJAŠNJENJE

- Naime, ako bi lutke iste boje kose razlikovali međusobno, na primer po boji haljinice koju nose kao u Primeru 6, pri čemu su haljinice istog modela, onda bi skup mogućih ishoda S_β "pozadinskog" eksperimenta β imao 20 jednakoverovratnih ishoda, jer svaka od 20 lutaka ima istu verovatnoću da bude izvučena 1/20.

- Tada,

- broj povoljnih jednakoverovratnih ishoda za elementarne događaje $\{\text{plavokosa}\}$, $\{\text{ridokosa}\}$, $\{\text{smedokosa}\}$, $\{\text{crnokosa}\}$, $\{\text{crvenokosa}\}$ eksperimenta α odgovara

- broju elemenata odgovarajućih slučajnih događaja Plavokosa , Ridokosa , Smedokosa , Crnokosa , Crvenokosa eksperimenta β .

PRIMER 7 IZRAČUNAVANJE VEROVATNOĆA

- Od ukupno $n=20$ lutaka u neprovidnoj vreći, imamo

- $n(\{\text{plavokosa}\}) = \text{card}(\text{Plavokosa}) = 2$ plavokose
- $n(\{\text{ridokosa}\}) = \text{card}(\text{Ridokosa}) = 3$ ridokose
- $n(\{\text{smedokosa}\}) = \text{card}(\text{Smedokosa}) = 4$ smedokose
- $n(\{\text{crnokosa}\}) = \text{card}(\text{Crnokosa}) = 5$ crnokosih
- $n(\{\text{crvenokosa}\}) = \text{card}(\text{Crvenokosa}) = 6$ crvenokosih.

- Odatle, na osnovu klasične definicije verovatnoće dobijamo:

- $P_\alpha(\{\text{plavokosa}\}) = P_\beta(\text{Plavokosa}) = 2/20 = 10\%$
- $P_\alpha(\{\text{ridokosa}\}) = P_\beta(\text{Ridokosa}) = 3/20 = 15\%$
- $P_\alpha(\{\text{smedokosa}\}) = P_\beta(\text{Smedokosa}) = 4/20 = 20\%$
- $P_\alpha(\{\text{crnokosa}\}) = P_\beta(\text{Crnokosa}) = 5/20 = 25\%$
- $P_\alpha(\{\text{crvenokosa}\}) = P_\beta(\text{Crvenokosa}) = 6/20 = 30\%.$

PRIMER 7 NAPOMENA

- Budući da su u Primeru 7, α i β dva eksperimenta sa različitim skupovima mogućih ishoda S_α i S_β , i odatle sa različitim odgovarajućim partitivnim skupovima $\mathcal{P}(S_\alpha)$ i $\mathcal{P}(S_\beta)$, na osnovu matematičke definicije verovatnoće sledi da je verovatnoća u slučaju
 - eksperimenta α , funkcija $P_\alpha: \mathcal{P}(S_\alpha) \rightarrow R_+=[0,+\infty)$, a
 - eksperimenta β , funkcija $P_\beta: \mathcal{P}(S_\beta) \rightarrow R_+=[0,+\infty)$,
 čije vrednosti se poklapaju na prethodno navedenim događajima.

7

UOPŠTENO - EKSPERIMENTI SA NEJEDNAKOVERATNIM ISHODIMA

- U praksi, kod eksperimenta sa nejednakoveratnim ishodima e_i , ne uvodimo posebno "pozadinski" eksperiment, već direktno određujemo
 - ukupan broj n jednakoveratnih ishoda i
 - broj $n(\{e_i\})$ povoljnih jednakoveratnih ishoda za svaki elementarni događaj $\{e_i\}$ (odnosno ishod e_i) posmatranog eksperimenta.
- Tada $P(\{e_i\}) = n(\{e_i\})/n$, odnosno

$$P(\{e_i\}) = \frac{\text{broj povoljnih jednakoveratnih ishoda za događaj } \{e_i\}}{\text{ukupan broj jednakoveratnih ishoda}}$$

8

PRIMER 8 POSTAVKA PROBLEMA

- Eksperiment α se sastoji u slučajnom izboru studenta iz grupe studenata, koji su polagali ispit iz Informatike u jednom ispitnom roku, i registruje se završna ocena koju je student ostvario na pomenutom ispitu iz Informatike.
- Skup svih mogućih ishoda, odnosno siguran događaj je $S_\alpha = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- Označimo sa $\{k+4\}$: "Student je dobio ocenu $k+4$.", $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$, elementarne događaje eksperimenta α .
- Interesuje nas verovatnoća događaja $A = \{8, 9, 10\}$.
- A: "Slučajno izabrani student iz grupe studenata koji su polagali ispit iz Informatike u posmatranom ispitnom roku dobio je ocenu veću od 7."

9

PRIMER 8 SPROVOĐENJE ISTRAŽIVANJA

- Rešenje je $P(A) = P(\{8\}) + P(\{9\}) + P(\{10\})$, ali verovatnoće ishoda eksperimenta α nisu poznate, i odatle vrednost $P(A)$ ne možemo odrediti.
- Kako studenta slučajno biramo iz grupe studenata koji su polagali ispit iz Informatike u određenom ispitnom roku, da bismo odredili verovatnoće ishoda eksperimenta α , dovoljno je sprovesti istraživanje o rezultatima ispita iz Informatike nad svim studentima koji su polagali ispit u posmatranom ispitnom roku.
- U tom cilju definišemo prekidnu varijablu (obeležje) Ocena, čije vrednosti 5, 6, 7, 8, 9 i 10 odgovaraju mogućim ishodima eksperimenta α , i istraživanje sprovedemo nad svim studentima koji su polagali ispit iz Informatike u posmatranom ispitnom roku.

10

PRIMER 8 GENERISANJE PODATAKA

- Registrovanjem vrednosti varijable Ocena na skupu od $n=122$ studenta, koji su polagali ispit iz Informatike u određenom ispitnom roku, dobili smo sledeće rezultate:
 - Prilikom sprovođenja eksperimenta α svaki od 122 studenta ima podjednaku šansu da bude izabran ($1/122$), i odatle svaka od 122 ocene ima istu verovatnoću da bude registrovana ($1/122$).
 - Posledično, relativne frekvencije vrednosti varijable Ocena predstavljaju verovatnoće realizacija ishoda eksperimenta α .

Ocena	f	%
5	31	25%
6	33	27%
7	37	30%
8	14	11%
9	6	5%
10	1	1%
Ukupno	n=122	100%

11

PRIMER 8 - IZRAČUNAVANJE VEROVATNOĆA

- Naime, u skupu od $n=122$ registrovane ocene,
 - ocena 5 registrovana je 31 put, tj. $n(\{5\})=31$
 - ocena 6 registrovana je 33 puta, tj. $n(\{6\})=33$
 - ocena 7 registrovana je 37 puta, tj. $n(\{7\})=37$
 - ocena 8 registrovana je 14 puta, tj. $n(\{8\})=14$
 - ocena 9 registrovana je 6 puta, tj. $n(\{9\})=6$
 - ocena 10 registrovana je 1 put, tj. $n(\{10\})=1$.
- Odatle, verovatnoće realizacija ishoda /elementarnih događaja eksperimenta α respektivno iznose:
 - $P(\{5\})=31/122=25\%$
 - $P(\{6\})=33/122=27\%$
 - $P(\{7\})=37/122=30\%$
 - $P(\{8\})=14/122=11\%$
 - $P(\{9\})=6/122=5\%$
 - $P(\{10\})=1/122=1\%$.
- Finalno, $P(A) = P(\{8\}) + P(\{9\}) + P(\{10\}) = 11\% + 5\% + 1\% = 17\%$.

12

NAPOMENA U VEZI PRIMERA 8

- Međutim, $P(A)=17\%$ predstavlja pravu vrednost verovatnoće realizacije događaja A eksperimenta a kada su u pitanju registrovani podaci iz posmatranog ispitnog roka ili iz bilo kog drugog ispitnog roka koji ima istu raspodelu relativnih frekvencija registrovanih ocena iz Informatike, ali ne i u opštem slučaju!
- Naime, u nekom drugom ispitnom roku možemo dobiti drugačiju raspodelu relativnih frekvencija registrovanih ocena iz Informatike, i odatle verovatnoća realizacije događaja A može uzeti i neku drugu vrednost.

13

USLOVNE VEROVATNOĆE

VEROVATNOĆA PRESEKA DOGAĐAJA – ZAJEDNIČKA VEROVATNOĆA.

NEZAVISNOST DOGAĐAJA

14

USLOVNA VEROVATNOĆA - DEFINICIJA

- Slučajni događaji mogu se realizovati jedan za drugim, na primer, od 7 lutaka koje „govore“, 3 su neispravne:
 - Slučajno biramo 2 lutke, jednu pa drugu „bez vraćanja“ i registrujemo ispravnost lutke.
 - Ako označimo n-neispravna, a i-ispravna lutka, tada $S=\{nn, ni, in, ii\}$ skup svih mogućih ishoda.
 - Posmatramo događaje $D_1=\{nn, ni\}$: „Prva izvučena lutka je neispravna.“ i $D_2=\{nn, in\}$: „Druga izvučena lutka je neispravna.“
- Otvora se pitanje uticaja realizacije jednog od njih (na primer D_1) na verovatnoću realizacije drugog događaja (D_2).
- U tom cilju uvode se pojmovi uslovne verovatnoće.
- Neka su A i B dva slučajna događaja nekog eksperimenta tako da $P(A)>0$.
- Definicija 10** Uсловna verovatnoća događaja B pod uslovom događaja A, u oznaci $P(B|A)$, je verovatnoća realizacije događaja B pod pretpostavkom da se događaj A realizovao.

15

ODREĐIVANJE USLOVNE VEROVATNOĆE

- Pretpostavimo da je
 - $k>0$ broj povoljnih ishoda za događaj A, a
 - $m\geq 0$ broj povoljnih ishoda za presek događaja A i B, odnosno za događaj $A\cap B=AB$, $m\leq k\leq n$,
 - gde je n ukupan broj svih mogućih jednakoverovatnih ishoda posmatranog eksperimenta.
- Tada, na osnovu klasične definicije verovatnoće,

$$P(B|A) = m/k = (m/n)/(k/n) = P(AB)/P(A)$$
 jer $P(A) = k/n$ i $P(AB) = m/n$.
- Odatle, $P(B|A) = P(AB)/P(A)$.
- Analogno, $P(A|B) = P(AB)/P(B)$.
- Posebno, ako je $A\cap B=\emptyset$, $P(A)>0$ i $P(B)>0$, tada $P(B|A) = P(A|B)=0$.



16

PRIMER 9: IZRAČUNAVANJE USLOVNE VEROVATNOĆE

- Vratimo se na primer u kome slučajno biramo 2 lutke, jednu pa drugu „bez vraćanja“, iz vreće u kojoj je 7 lutaka koje „govore“ i od kojih su 3 neispravne.
- Ako je poznato da je prvi put izvučena neispravna lutka, interesuje nas verovatnoća događaja da će i drugi put biti izvučena neispravna lutka.
- Uzimajući u obzir oznake: n-neispravna lutka, i-ispravna lutka, imamo da je $S=\{nn, ni, in, ii\}$.
- Definišemo:
 - $D_1=\{nn, ni\}$: „Prva izvučena lutka je neispravna.“
 - $D_2=\{nn, in\}$: „Druga izvučena lutka je neispravna.“

17

PRIMER 9: PRIMENA KLASIČNE DEFINICIJE VEROVATNOĆA

- Ako bismo svih 7 lutaka međusobno razlikovali, tada bismo imali ukupno $7 \times 6 = 42$ jednakoverovatna ishoda.
- Kako je $D_1 \cap D_2 = D_1 D_2 = \{nn\}$ i $D_1 = \{ni, nn\}$, a broj povoljnih jednakoverovatnih ishoda za događaj
 - $\{nn\}$ je $3 \times 2 = 6$, a za događaj
 - $\{ni\}$ je $3 \times 4 = 12$,
 neposredno dobijamo da je

$$P(D_1 D_2) = P(\{nn\}) = 6/42 = 1/7$$
 i

$$P(D_1) = P(\{ni, nn\}) = P(\{ni\}) + P(\{nn\}) = (12/42) + (6/42) = 18/42 = 3/7 = P(\{ni\}).$$
- Odatle, na osnovu definicije uslovne verovatnoće

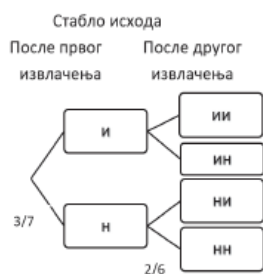
$$P(D_2|D_1) = P(D_1 D_2)/P(D_1) = (1/7)/(3/7) = 1/3.$$

18

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

PRIMER 9: POMOĆU STABLA ISHODA



- Jednostavnije razmatranje: Budući da smo u prvom izvlačenju od 7 lutki izvukli neispravnu lutku, u vreći je ostalo 6 lutaka od kojih su 2 neispravne, što znači da uslovna verovatnoća događaja D_2 pod uslovom događaja D_1 iznosi $P(D_2 | D_1) = 2/6 = 1/3$.

19

PRIMER 10: IZRAČUNAVANJE USLOVNE VEROVATNOĆE

- U Primeru 8, eksperiment α se sastojao u slučajnom izboru studenta iz grupe od 122 studenta, koji su polagali ispit iz Informatike u jednom ispitnom roku, i kao ishod se registrovala završna ocena koju je student ostvario na pomenutom ispitu iz Informatike.
- Razmatramo događaje
 - $A = \{8, 9, 10\}$: „Slučajno izabrani student je dobio ocenu veću od 7.“
 - $B = \{6, 7, 8, 9\}$: „Slučajno izabrani student je položio ispit i dobio ocenu manju od 10.“
- Kako je $A \cap B = AB = \{8, 9\}$ i budući da je $P(A) = 21/122$, $P(B) = 90/122$ i $P(AB) = 20/122$, dobijamo

$$P(A | B) = P(AB)/P(B) = (20/122)/(90/122) = 20/90 \approx 22\%$$

$$P(B | A) = P(AB)/P(A) = (20/122)/(21/122) = 20/21 \approx 95\%$$

20

VEROVATNOĆA PRESEKA DOGAĐAJA – ZAJEDNIČKA VEROVATNOĆA

- Neka su A i B dva slučajna događaja nekog eksperimenta takva da $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$.
- Uzimajući u obzir definiciju uslovne verovatnoće, za verovatnoću preseka događaja A i B , odnosno za zajedničku verovatnoću događaja A i B važi

$$P(AB) = P(B)P(A | B)$$

kao i

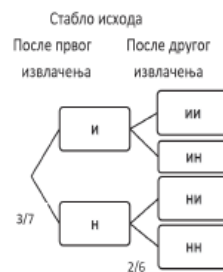
$$P(AB) = P(A)P(B | A)$$

odnosno

$$P(AB) = P(B)P(A | B) = P(A)P(B | A).$$

21

PRIMER 11: IZRAČUNAVANJE ZAJEDNIČKE VEROVATNOĆE POMOĆU STABLA ISHODA



- U Primeru 9, verovatnoće ishoda posmatranog eksperimenta se dobijaju kao zajedničke verovatnoće odgovarajućih događaja.
- Na primer, verovatnoća ishoda $\{nn\}$ je zajednička verovatnoća događaja
 - $D_1 = \{nn, ni\}$: „Prva izvučena lutka je neispravna.“
 - $D_2 = \{nn, in\}$: „Druga izvučena lutka je neispravna.“

jer $D_1 \cap D_2 = D_1 D_2 = \{nn\}$.

$$P(\{nn\}) = P(D_2 D_1) = P(D_1) \cdot P(D_2 | D_1) = (3/7) \cdot (2/6) = 1/7.$$

22

NEZAVISNOST SLUČAJNIH DOGAĐAJA

- Dva slučajna događaja A i B nekog eksperimenta su nezavisna ako realizacija jednog od njih ne utiče na verovatnoću realizacije drugog, što izražavamo sa $P(A | B) = P(A)$ ili $P(B | A) = P(B)$.
- Budući da je za $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, $P(A | B)P(B) = P(AB) = P(A)P(B | A)$ neposredno sledi da ako je događaj A nezavisan od događaja B , onda je i događaj B nezavisan od događaja A .
- **Definicija 11** Dva slučajna događaja A i B su nezavisna (stohastički nezavisna) ako važi $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Za događaje koji nisu nezavisni, kažemo da su zavisni.

23

ZAVISNI DOGAĐAJI

- Dva slučajna događaja A i B su zavisna ako realizacija jednog od njih utiče na verovatnoću realizacije drugog, što izražavamo sa $P(A | B) \neq P(A)$ ili $P(B | A) \neq P(B)$, odnosno sa $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$.
- Na primer, u Primeru 9, gde je $S = \{nn, ni, in, ii\}$ i
 - $D_1 = \{nn, ni\}$: „Prva izvučena lutka je neispravna.“
 - $D_2 = \{nn, in\}$: „Druga izvučena lutka je neispravna.“
 imamo da je $D_1 \cap D_2 = D_1 D_2 = \{nn\}$.
- Kako dobijamo da je $P(D_1 D_2) \neq P(D_1) \cdot P(D_2)$ jer $P(D_1 D_2) = 3 \cdot 2/7 \cdot 6 = 1/7 = 7/49$, a $P(D_1) \cdot P(D_2) = (3/7) \cdot ((3 \cdot 2 + 4 \cdot 3)/7 \cdot 6) = (3/7) \cdot (3/7) = 9/49$ događaji D_1 i D_2 su stohastički zavisni, odnosno $P(D_2 | D_1) = 2/6 = 14/42 \neq 18/42 = 3/7 = (3 \cdot 2 + 4 \cdot 3)/7 \cdot 6 = P(D_2)$

24

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

UZAJAMNO ISKLJUČIVI (DISJUNKTNI) DOGAĐAJI

- Posebno, ako su dva slučajna događaja A i B uzajamno isključiva, odnosno $A \cap B = \emptyset$, pri čemu je $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, oni nisu nezavisni jer $P(AB) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$.
- Na primer, ako u Primeru 3 posmatramo događaje
 - $C = \{\text{plavokosa, smeđokosa}\}$ i
 - $D = \{\text{ridokosa, crnokosa}\}$
 - gde je $S_3 = \{\text{plavokosa, ridokosa, smeđokosa, crnokosa, crvenokosa}\}$ skup svih jednakoverovatnih ishoda eksperimenta α , tada $C \cap D = CD = \emptyset$.
- Odatle, $P(CD) = P(\emptyset) = 0 \neq 4/25 = 2/5 \cdot 2/5 = P(C) \cdot P(D)$ odnosno uzajamno isključivi događaji C i D su stohastički zavisni.

25

ODNOS UZAJAMNO ISKLJUČIVIH, NEZAVISNIH I ZAVISNIH DOGAĐAJA

Uzajamno isključivi događaji A i B takvi da $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, uvek su zavisni jer iz $A \cap B = \emptyset$ sledi $P(AB) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$.

Uopšteno:

- Nezavisni događaji A i B takvi da $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, nikada nisu uzajamno isključivi jer iz $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ sledi $P(AB) > 0$, tj. $P(AB) \neq 0$ što znači $AB = A \cap B \neq \emptyset$.
- Zavisni događaji A i B takvi da $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, mogu ali i ne moraju biti uzajamno isključivi jer za $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$, može biti $A \cap B = \emptyset$, ali i $A \cap B \neq \emptyset$.

26

MARGINALNE VEROVATNOĆE. NEZAVISNOST EKSPERIMENTA

27

PRIMER 12

RAZVRSTAVANJE STATISTIČKOG SKUPA NA OSNOVU DVE KARAKTERISTIKE

- Među 310 studenata jedne visoke škole strukovnih studija sprovedeno je istraživanje o zadovoljstvu radom Studentskog parlamenta po godinama studija i dobijeni su sledeći rezultati:

Tabela1 Rezultati istraživanja o zadovoljstvu radom Studentskog parlamenta

Godina studija	Ocena rada studentskog parlamenta		Ukupno
	Zadovoljan	Nezadovoljan	
I	75	45	120
II	64	36	100
III	61	29	90
Ukupno	200	110	310

28

TABELE KONTIGENCIJE

- Pomoću Tabele 1 prikazana je raspodela 310 studenata na osnovu dve karakteristike, odnosno dve varijable:
 - Godina studija (prva, druga, treća)
 - Ocena rada studentskog parlamenta (zadovoljan, nezadovoljan).
- Tabela u kojoj su unakrsno prikazane frekvencije modaliteta (kategorija ili vrednosti) dve varijable (karakteristike) posmatrane na istom statističkom skupu naziva se tabela kontigencije (dvo-dimenzionalna tabela kontigencije).
- Ako se prikazuju frekvencije modaliteta tri karakteristike, onda imamo tro-dimenzionalnu tabelu kontigencije itd.

29

PRIMER 12

REGISTROVANJE ISHODA DVA EKSPERIMENTA

- Slučajno biramo jednog od 310 ispitanih studenata, pri čemu svaki student ima istu verovatnoću da bude izabran (1/310).
- Budući da je pored zadovoljstva radom Studentskog parlamenta, razmatrana i godinu studija studenata, nad slučajno izabranim studentom mogu se istovremeno registrovati ishodi dva eksperimenta:
 - α u kome se registruje godina studija studenta i
 - β u kome se registruje ocena rada Studentskog parlamenta.
- Odatle, kod slučajno izabranog studenta mogu se razmatrati verovatnoće realizacije ishoda jednog eksperimenta, neuključujući ishode drugog eksperimenta sa kojima su povezani.

30

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

PRIMER 12 INTERPRETACIJA

- Naime, možemo razmatrati verovatnoće realizacija događaja da je slučajno izabrani student Škole:
 - student I godine ili student II godine ili student III godine ili
 - zadovoljan radom Studentskog parlamenta ili nezadovoljan radom Studentskog parlamenta.
- Označimo sa
 - $I = \{\text{slučajno izabrani student je student I godine studija}\}$
 - $II = \{\text{slučajno izabrani student je student II godine studija}\}$
 - $III = \{\text{slučajno izabrani student je student III godine studija}\}$
- elementarne događaje eksperimenta α , a sa
 - $Z = \{\text{slučajno izabrani student je zadovoljan radom Studentskog parlamenta}\}$
 - $D = \{\text{slučajno izabrani student je nezadovoljan radom Studentskog parlamenta}\}$
- elementarne događaje eksperimenta β .

31

MARGINALNE VEROVATNOĆE

- Razmatranje verovatnoća realizacija ishoda dva ili više eksperimenata, pri čemu se ishodi svakog eksperimenta registruju nad istom slučajno izabranom jedinicom posmatranja, nameće potrebu za uvođenjem pojma marginalne verovatnoće.
- Marginalna verovatnoća je verovatnoća realizacije događaja jednog eksperimenta neuključujući u razmatranje bilo koji događaj drugog eksperimenta koji može biti u vezi sa njim.

32

PRIMER 12 MARGINALNE VEROVATNOĆE

- Verovatnoće $P(I)$, $P(II)$, $P(III)$, $P(Z)$, $P(D)$ se nazivaju marginalnim verovatnoćama jer se odnose na verovatnoće elementarnih događaja samo jednog eksperimenta neuzimajući u obzir elementarne događaje drugog eksperimenta sa kojima su u vezi.
- Budući da se student slučajno bira iz grupe od 310 studenata među kojima je prethodno sprovedeno istraživanje, za verovatnoće događaja I , II , III , Z i D uzimamo odgovarajuće relativne frekvencije:

$$P(I) = 120/310 = 0.39 = 39\% \quad P(Z) = 200/310 = 0.65 = 65\%$$

$$P(II) = 100/310 = 0.32 = 32\% \quad P(D) = 110/310 = 0.35 = 35\%$$

$$P(III) = 90/310 = 0.29 = 29\%$$
 gde je $0.39 + 0.32 + 0.29 = 1$ pri čemu je $0.65 + 0.35 = 1$.

33

USLOVNA VEROVATNOĆA DOGAĐAJA IZ DVA EKSPERIMENTA

- Međutim, u Primeru 12 može se razmatrati i verovatnoća realizacije, na primer događaja:
 - da je slučajno izabrani student zadovoljan radom Studentskog parlamenta ako smo već utvrdili da je student II godine studija, odnosno uslovna verovatnoća $P(Z|II)$ ili
 - da je slučajno izabrani student, student II godine, ako smo prethodno utvrdili da je zadovoljan radom Studentskog parlamenta, odnosno uslovna verovatnoća $P(II|Z)$.
- Naime, može se razmatrati uslovna verovatnoća događaja iz jednog eksperimenta pod pretpostavkom da je realizovan određen događaj iz drugog eksperimenta.
- Sa tim u vezi razmatra se i zajednička verovatnoća dva događaja iz dva različita eksperimenta.

34

IZRAČUNAVANJE USLOVNIH I ZAJEDNIČKIH VEROVATNOĆA

Tabela 2 Dvodimenzionalna tabela kontigencije

	Zadovoljan	Nezadovoljan	Ukupno
I	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
II	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
III	n_{31}	n_{32}	n_{3+}
Ukupno	n_{+1}	n_{+2}	n

- $P(Z|I) = n_{11}/n_{1+}$
 $P(D|I) = n_{12}/n_{1+}$
 $P(Z|II) = n_{21}/n_{2+}$
 $P(D|II) = n_{22}/n_{2+}$
 $P(Z|III) = n_{31}/n_{3+}$
 $P(D|III) = n_{32}/n_{3+}$
- $P(I|Z) = n_{11}/n_{+1}$
 $P(II|Z) = n_{21}/n_{+1}$
 $P(III|Z) = n_{31}/n_{+1}$
 $P(I|D) = n_{12}/n_{+2}$
 $P(II|D) = n_{22}/n_{+2}$
 $P(III|D) = n_{32}/n_{+2}$
- $P(I \cap Z) = n_{11}/n$
 $P(I \cap D) = n_{12}/n$
 $P(II \cap Z) = n_{21}/n$
 $P(II \cap D) = n_{22}/n$
 $P(III \cap Z) = n_{31}/n$
 $P(III \cap D) = n_{32}/n$

35

PRIMER 12

IZRAČUNAVANJE USLOVNIH VEROVATNOĆA

Na osnovu podataka iz Tabele 1 možemo odrediti uslovne verovatnoće na sledeći način:

- $P(Z|I) = 75/120 = 0.625$
 $P(I|Z) = 75/200 = 0.375$
 $P(N|I) = 45/120 = 0.375$
 $P(II|Z) = 64/200 = 0.320$
 $0.625 + 0.375 = 1$
 $P(III|Z) = 61/200 = 0.305$
- $P(Z|II) = 64/100 = 0.640$
 $P(N|II) = 36/100 = 0.360$
 $0.640 + 0.360 = 1$
 $P(II|N) = 36/110 = 0.327$
- $P(Z|III) = 61/90 = 0.678$
 $P(N|III) = 29/90 = 0.322$
 $0.678 + 0.322 = 1$
 $P(III|N) = 29/110 = 0.264$
- $0.375 + 0.320 + 0.305 = 1$
 $0.409 + 0.327 + 0.264 = 1$

36

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

PRIMER 12

IZRAČUNAVANJE ZAJEDNIČKIH VEROVATNOĆA

- o Na osnovu podataka iz Tabele 1 možemo odrediti zajedničke verovatnoće na sledeći način:
 $P(I \cap Z) = 75/310$ $P(I \cap D) = 45/310$
 $P(II \cap Z) = 64/310$ $P(II \cap D) = 36/310$
 $P(III \cap Z) = 61/310$ $P(III \cap D) = 29/310$
- o Napomena:
 - Marginalne, uslovne i zajedničke verovatnoće u Primeru 12 mogu se odrediti i pomoću dva stabla ishoda ako definišemo koju karakteristiku prvo registrujemo, a koju registrujemo kao drugu.
 - Marginalne, uslovne i zajedničke verovatnoće u Primeru 12 odnose se samo na slučajno izabranog studenta iz grupe studenata među kojima je sprovedeno istraživanje čiji rezultati su izloženi u Tabeli 1. Ukoliko bismo studenta slučajno birali iz posmatrane škole u kojoj je više od 310 studenata, dobijene verovatnoće ne znače da su validne.

PROVERA NEZAVISNOSTI DOGAĐAJA IZ DVA EKSPERIMENTA

- o Na osnovu definicije nezavisnosti dva događaja i podataka iz Tabele 1, možemo ispitati da li su događaji
 - o $Z = \{\text{slučajno izabrani student je zadovoljan radom Studentskog parlamenta}\}$ eksperimenta β i
 - o $II = \{\text{slučajno izabrani student je student II godine studija}\}$ eksperimenta α nezavisni.
- o Kako je $P(II \cap Z) = 64/310$, $P(II) = 100/310$ i $P(Z) = 200/310$ dobijamo da je

$$P(II \cap Z) = 64/310 \neq 64.52/310 = P(II)P(Z)$$
 što znači da je reč o zavisnim događajima.

38

NEZAVISNOST DVA EKSPERIMENTA

- o **Definicija 12** Dva eksperimenta α i β su nezavisna (stohastički nezavisna) ako za svaki događaj A eksperimenta α i za svaki događaj B eksperimenta β važi

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$
- o U suprotnom, eksperimenti su zavisni.
- o Na primer, u Primeru 12, polazeći od činjenice da događaj
 $Z = \{\text{slučajno izabrani student je zadovoljan radom Studentskog parlamenta}\}$
 eksperimenta β nije nezavisan od događaja
 $II = \{\text{slučajno izabrani student je student II godine studija}\}$
 eksperimenta α , to eksperimenti α i β nisu nezavisni.

39

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače
MATEMATIKA

6. UVOD U ŠENONOVU TEORIJU – KVANTITATIVNO IZRAŽAVANJE INFORMACIJE

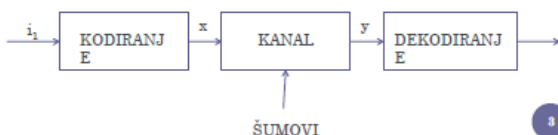
Predavač: mr Tatjana Bajić

FENOMEN BRZINE PRENOSA INFORMACIJA

- Ubrzano usavršavanje sistema i tehnologija za obradu i razmenu informacija, tokom skoro dva veka, rezultiralo je savršenom brzinom prenosa informacija u realnom vremenu između subjekata koji mogu biti izuzetno udaljeni jedni od drugih.
- Takav progres je uslovio da funkcionalnost savremenog društva u velikoj meri zavisi od stvaranja i prenosa informacija.
- Međutim, imajući u vidu savremene digitalne tehnologije za razmenu informacija, pod prenosom informacija podrazumevaju se određena kodiranja, kako bi se putem kablova, predajnika i/ili satelitskih veza, odnosno uopšteno govoreći, kanala sa šumovima, saopštenje jednog izvora, posle dekodiranja, prenelo ka drugom izvoru.

NAJJEDNOSTAVNIJA OPŠTA ŠEMA PRENOŠENJA INFORMACIJA

- Saopštenje nekog izvora informacija I_1 treba kodirati u azbuku $\mathcal{A}$ tako da na ulazu kanala sa šumovima imamo izvor X , a na izlazu kanala, saopštenje izvora Y treba dekodirati da bismo na kraju dobili saopštenje koje prima izvor informacija I_2 .



ŠENONOVA TEORIJA

- Matematička teorija, koja je prva logičkim rasuđivanjem strogo dokazala da se kroz kanal sa šumovima može preneti neka informacija tako da se, sa verovatnoćom proizvoljno bliskom 100%, na izlazu tačno utvrdi koja je informacija poslata, je Šenonova teorija.
- Šenonova teorija je proistekla iz rada Kloda Šenona (Claude E. Shannon) objavljenog 1948. godine u kome se "informacija" razmatra pomoću skupa mogućih poruka.
- Kasnije, ovaj apstraktni koncept prerasta u novu značajnu oblast u primenjenoj matematici koja je popočala put za nastanak, danas vrlo poznate, naučne discipline - teorije informacija.

ZNAČAJ ŠENONOVE TEORIJE

- Osnovni problemi sa kojima se Šenon suočio i koji su ga inicirali za nastanak pomenute teorije su problemi prvenstveno povezani sa radio komunikacijama.
- Međutim, kanali kroz koje se informacija prenosi ne moraju da budu samo telegrafске i telefonske žice ili medijski predajnici radio signala, već na primer, takođe mogu biti nervi kroz koje se, kontrolisano od strane mozga, prenose signali od organa čula do mišića.
- Odatle, Šenonov rad je izvršio ogroman stimulacioni efekat na sva istraživanja povezana sa prenosom i čuvanjem informacija sa kojima se susrećemo u prirodi, tehnologijama ili čak u društvu, što je uticalo da sam pojam informacije dobije daleko dublje i šire značenje, odnosno da preraste u metapojam.

KVANTITATIVNO IZRAŽAVANJE INFORMACIJE

- Posmatrano sa matematičke tačke gledišta, Šenonova teorija potiče iz sasvim elementarnih razmatranja.
- Ključni problem, od kog je Šenon pošao, je kvantifikacija informacije.
- Uvodeći dva osnovna pojma:
 - pojam entropije i
 - pojam uzajamne informacijeŠenon je, za razliku od svojih prethodnika, uspeo da kvantitativno izrazi informaciju.
- Upravo, koristeći entropiju izvora informacija Šenon je
 - postavio kriterijum koji mora biti zadovoljen da bi se sa verovatnoćom proizvoljno bliskom 100% moglo tačno dekodirati poslato saopštenje.
 - odredio i gornju granicu aproksimacije brzine prenosa informacija za određen način kodiranja.

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

OSNOVNI MODEL NA KOME SE ZASNIVA DEFINICIJA KVANTITETA INFORMACIJE

- Klasični primeri eksperimenta sa konačnim brojem slučajnih ishoda iz teorije verovatnoća:
 - bacanje "fer" novčića, sa dva moguća ishoda: pismo i grb
 - bacanje homogene kocke za igru, sa šest mogućih ishoda: 1,2,3,4,5,6
- kao i
 - prijem poruke od izvesnog broja poruka koje mogu biti poslate.
- Odatle, koncept u kome primljena informacija predstavlja jednu od poruku iz skupa mogućih poruka koju je izvor informacija poslao, odgovara konceptu eksperimenta sa slučajnim ishodima.
- Osnovni model na kome se zasniva definicija entropije, a potom i uzajamne informacije, je eksperiment sa slučajnim ishodima – slučajni eksperiment.

7

ENTROPIJA - NUMERIČKA MERA NEODREĐENOSTI

- Šenon je entropiju definisao kao numeričku meru stepena neodređenosti slučajnog eksperimenta tako da vrednost entropije odgovara maksimalnoj količini informacije koja može biti sadržana u posmatranom eksperimentu, odnosno količini potpune informacije koja se dobija iz posmatranog eksperimenta.
 - Podudarnost između
 - vrednosti entropije nekog slučajnog eksperimenta i
 - količine potpune informacije koja je sadržana u tom eksperimentu
- logički je zasnovana na činjenici da je
- verovatnoća realizacije slučajnog ishoda tog eksperimenta
 - obrnuto proporcionalna količini informacije koju posmatrani ishod nosi u sebi.

8

PRIMER SLUČAJNOG ISHODA KOJI NOSI VELIKU KOLIČINU INFORMACIJE:

- Eksperiment se sastoji u slučajnom izboru deteta iz jedne predškolske grupe dece i registrovanju da li dete zna da izrecituje Šekspirov sonet ili ne.
- Skup svih mogućih ishoda posmatranog eksperimenta čine dva moguća ishoda:
 - dete zna da izrecituje Šekspirov sonet ili
 - dete ne zna da izrecituje Šekspirov sonet.
- Očigledno, mala je šansa da slučajno izabrano dete iz grupe predškolaca zna da izrecituje Šekspirov sonet.
- Odatle, ukoliko bi slučajno izabrano dete iz jedne grupe predškolaca izrecitovalo Šekspirov sonet, onda bi nam takav ishod doneo veliku količinu informacije, odnosno bili bismo izuzetno iznenađeni.

9

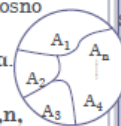
"NEODREĐENOST" SLUČAJNOG ISHODA

- Neka je $A_1, A_2, \dots, A_n$, konačan niz događaja koji potpuno razlažu siguran događaj S eksperimenta α , odnosno

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$
- Neka je $p_k = P(A_k)$ verovatnoća realizacija ishoda A_k , $k=1,2,\dots,n$,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$
- Tada, "neodređenost" ishoda A_k se definiše sa

$$\log_2(1/p_k) = -\log_2 p_k$$
 koja se realizuje sa verovatnoćom p_k .
- Naime, što je verovatnoća p_k realizacije ishoda A_k manja, to je "neodređenost" tog događaja $\log_2(1/p_k)$ veća, odnosno taj ishod nosi u sebi veću količinu informacije.



10

ENTROPIJA - DEFINICIJA

- Entropija eksperimenta α , koji ima konačan skup ishoda $\{A_1, \dots, A_n\}$ sa odgovarajućom raspodelom verovatnoća $\{p_1, \dots, p_n\}$, u oznaci $H(\alpha)$, je numerička mera stepena neodređenosti posmatranog eksperimenta.
- Uzimajući u obzir definiciju "neodređenosti" ishoda A_k , $k=1,2,\dots,n$, vrednost entropije eksperimenta α se određuje sa

$$H(\alpha) = -\{p_1 \cdot \log_2 p_1 + \dots + p_n \cdot \log_2 p_n\}$$
 i jednaka je količini potpune informacije koja je sadržana u eksperimentu α .
- U zavisnosti od izbora osnove logaritma, imamo različite merne jedinice entropije.
- Zbog uskladjenosti sa digitalnim tehnologijama za osnovu logaritma se obično uzima broj 2, tako da je merna jedinica vrednosti entropije 1 bit.

11

USLOVI POD KOJIMA SLUČAJNI EKSPERIMENT IMA MAKSIMALNU VREDNOST ENTROPIJE

- Ukoliko su svi ishodi $A_1, \dots, A_n$ nekog eksperimenta α jednakoverovatni, odnosno

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n,$$
 tada $H(\alpha) = -n(1/n) \cdot \log_2(1/n) = \log_2 n$.
- Budući da je eksperiment sa jednakoverovnim ishodima najviše moguće neodređen, to je $H(\alpha) = \log_2 n$ maksimalna vrednost entropije koju može da dostigne neki eksperiment α sa n slučajnih ishoda.
- Odatle, entropiju od 1 bita ima eksperiment koji ima dva jednakoverovna slučajna ishoda (jer $\log_2 2=1$) i to je maksimalna vrednost entropije koju eksperiment sa dva slučajna ishoda može da dostigne.

12

USLOVI POD KOJIMA SLUČAJNI EKSPERIMENT IMA MINIMALNU VREDNOST ENTROPIJE

- o Ako jedan od slučajnih ishoda $A_1, \dots, A_n$ nekog eksperimenta α ima verovatnoću realizacije 1, odnosno 100%, a ostali 0, tada entropija tog eksperimenta je

$$H(\alpha) = 0 + \dots + 0 + 1 \cdot \log_2 1 = 0 + \dots + 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

i to je minimalna vrednost koju entropija nekog slučajnog eksperimenta može da ima.

- o Odatle, za entropiju proizvoljnog eksperimenta α sa n mogućih slučajnih ishoda važi nejednakost:

$$0 \leq H(\alpha) \leq \log_2 n.$$

13

ENTROPIJA U PRIMENAMA – ENTROPIJA POSTAVLJENOG PITANJA U ANKETNOM UPITNIKU

- o Budući da se anketni upitnici spovode nad slučajno izabranim elementima populacije, registrovanje odgovora na postavljeno pitanje otvorenog tipa predstavlja jednu realnu interpretaciju registrovanja ishoda eksperimenta sa slučajnim ishodima.
- o Drugim rečima, dobijen odgovor na postavljeno pitanje otvorenog tipa predstavlja ishod slučajnog eksperimenta.
- o Kod pitanja otvorenog tipa obuhvaćeni su svi mogući odgovori koje ispitanik može dati na postavljeno pitanje.
- o Odatle, kod pitanja otvorenog tipa, ukoliko je pitanje korektno formulisano, unapred su obezbeđeni svi uslovi za dobijanje potpune informacije koju nam mogu dati odgovori na postavljeno pitanje.

14

PITANJE ZATVORENOG TIPA

- o Međutim, na pitanja otvorenog tipa se vrlo često ne odgovara u anketnim upitnicima, odnosno ona nisu tako popularna kao pitanja zatvorenog tipa.
- o Pitanja zatvorenog tipa podrazumevaju unapred ponuđene odgovore.
- o Odatle, pitanja zatvorenog tipa ne samo da nameću korektnu formulaciju samog pitanja, već je potrebno odgovore ponuditi tako da budu obezbeđeni uslovi za dobijanje entropije, odnosno potpune informacije koja je sadržana u odgovorima na postavljeno pitanje.
- o Naime, odgovore na pitanje zatvorenog tipa treba ponuditi tako da predstavljaju ishode slučajnog eksperimenta.

15

USLOVI ZA DOBIJANJE MAKSIMALNE KOLIČINE INFORMACIJE

- o Konkretno to znači da :
 - ponuđeni odgovori treba da obuhvataju sve moguće odgovore koji mogu biti dati na postavljeno pitanje kao i da se
 - ponuđeni odgovori međusobno "isključuju".
- o Samo pod tim uslovima, odgovor na postavljeno pitanje zatvorenog tipa može se smatrati ishodom slučajnog eksperimenta.
- o Generalno pravilo: Prvo se "grubo" obuhvate svi opšti odgovori koji se međusobno isključuju, a zatim se u okviru datih odgovora može vršiti dublje "razbijanje", u smislu davanja konkretnijih odgovora koji bliže opisuju problem.

16

PRIMER 1

Tabela 1 Rezultati anketiranja studenata Visoke škole strukovnih studija za vaspitače u Šapcu školske 2012/13. godine, na pitanje o optimalnosti broja predmeta studijskog programa u I semestru studija

ODGOVOR	f	%
Optimalan	40	80.00%
Mali	1	2.00%
Veliki	9	18.00%
Broj studenata koji nije odgovorio na pitanje	0	0.00%
UKUPNO	50	100.00%

- o Eksperiment se sastoji u slučajnom izboru studenta iz grupe studenata koji su učestvovali u anketiranju i kao ishod registruje se odgovor koji je dao na postavljeno pitanje.

- o Uzimajući dobijene relativne frekvencije odgovora za verovatnoće ishoda posmatranog eksperimenta dobijamo da je vrednost entropije ovog eksperimenta

$$-(0.80 \cdot \log_2 0.80 + 0.02 \cdot \log_2 0.02 + 0.18 \cdot \log_2 0.18) = 0.816$$

gde je $\log_2 3 = 1.585$ maksimalna moguća entropija.

17

PROBLEM OBUHVATANJA SVIH MOGUĆIH ODGOVORA

- o U realnim situacijama, da bismo obuhvatili sve moguće odgovore koji mogu biti dati na određeno pitanje zatvorenog tipa, ponekad je potrebno ponuditi veliki broj odgovora.
- o Međutim i pored toga, kod nekih pitanja, sve mogućnosti biće potpuno iscrpljene tek kada kao odgovor ponudimo odgovore kao što su:
 - nešto drugo
 - nijedan i sl.
- o Ukoliko se ponudi odgovor tipa "nešto drugo", tada je potrebno ispitaniku omogućiti da da svoje obrazloženje šta smatra pod odgovorom "nešto drugo".

18

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

PRIMER 2 ODGOVOR "NEŠTO DRUGO"

Tabela 2 Rezultati anketiranja bivših studenata Visoke škole strukovnih studija za vaspitače u Šapcu tokom tri školske godine, o merama za unapređenje nastave kad su u pitanju stručne kompetencije str.vaspitača

PE	MERE ZA UNAPREĐENJE STANJA	2012/13	2014/15	2015/16	Σ	%
1	Potrebno je više teorijske nastave	0	0	1	1	0.24%
2	Potrebno je više praktične nastave	18	21	26	65	15.20%
3	Potrebno je više stručne prakse	21	15	19	55	12.94%
4	Potrebno je koristiti u nastavi interaktivno nastavno materijal	7	11	8	26	6.12%
5	Potrebno je više pažnje posvetiti osposobljavanju studenata za timski rad	7	17	14	38	8.94%
6	Potrebno je unaprediti pedagoške sposobnosti nastavnika	13	3	10	26	6.12%
7	Potrebno je povećati obim nastavne materije	2	0	0	2	0.47%
8	Potrebno je smanjiti obim nastavne materije	4	1	4	9	2.12%
9	Potrebno je povećati obim literature	10	0	4	14	3.29%
10	Potrebno je smanjiti obim literature	2	1	4	7	1.65%
11	Potrebno je poboljšati kvalitet literature	10	12	7	29	6.82%
12	Potrebno je izvršiti bolju selekciju studenata pri priklonu upisa	21	24	21	66	15.53%
13	Potrebno je smanjiti broj studenata	10	14	15	39	9.18%
14	Potrebno je povećati angažovanje nastavnika i saradnika u radu sa studentima	17	10	17	44	10.35%
15	Nešto drugo	3	1	0	4	0.94%
Ukupno broj predloženih mera za unapređenje stanja		145	130	150	425	100.00%

PRIMER 3 ODGOVOR "NIJEDAN"

Tabela 3 Uporedni rezultati anketiranja studenata Visoke škole strukovnih studija za vaspitače u Šapcu za dve školske godine na pitanje o tome koji predmet iz I semestra studija zasluhuje veći broj ESPB bodova

Naziv predmeta	2012/13.		2013/14.	
	f	%	f	%
Sociologija obrazovanja	6	12.00%	5	7.69%
Savremeni srpski jezik	3	6.00%	8	12.31%
Opšta pedagogija	18	36.00%	12	18.46%
Psihologija razvoja ličnosti	4	8.00%	4	6.15%
Informatika sa računarstvom	0	0.00%	3	4.62%
Telesni razvoj i zdravstveno vaspitanje	6	12.00%	6	9.23%
Nijedan	Nije ponuđen odgovor		26	40.00%
Broj studenata koji nije odgovorio na pitanje	13	26.00%	1	1.54%
Ukupno	50	100.00%	65	100%

USLOVNA ENTROPIJA I UZAJAMNA INFORMACIJA

USLOVNA ENTROPIJA

o Neka je

- $A_1, \dots, A_n$ konačan niz događaja koji potpuno razlaže siguran događaj S_α eksperimenta α
- $B_1, \dots, B_m$ konačan niz događaja koji potpuno razlaže siguran događaj S_β eksperimenta β ,

koje nadalje nazivamo ishodima eksperimenta α odnosno β , respektivno.

- o Za neko $j=1, \dots, m$, uslovna entropija eksperimenta α pod uslovom realizacije ishoda B_j eksperimenta β , u oznaci $H(\alpha | B_j)$, predstavlja numeričku meru stepena neodređenosti eksperimenta α pod uslovom realizacije ishoda B_j eksperimenta β .

ODREĐIVANJE USLOVNE ENTROPIJE

- o Vrednost uslovne entropije $H(\alpha | B_j)$ se određuje sa $H(\alpha | B_j) = - \{P(A_1 | B_j) \cdot \log_2 P(A_1 | B_j) + \dots + P(A_n | B_j) \cdot \log_2 P(A_n | B_j)\}$

što znači da zahteva poznavanje uslovnih verovatnoća $P(A_i | B_j)$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$.

- o Uсловna entropija eksperimenta α pod uslovom realizacije eksperimenta β , $H(\alpha | \beta)$, predstavlja numeričku meru stepena neodređenosti eksperimenta α pod uslovom realizacije eksperimenta β i njena vrednost se određuje sa

$$H(\alpha | \beta) = - \{P(B_1) \cdot H(\alpha | B_1) + \dots + P(B_m) \cdot H(\alpha | B_m)\}$$

OSOBINE USLOVNE ENTROPIJE

- o Ako realizacija eksperimenta β u potpunosti određuje eksperiment α , tada $H(\alpha | \beta) = 0$.
- o Sa druge strane, ako su α i β statistički nezavisni eksperimenti tada $H(\alpha | \beta) = H(\alpha)$.
- o Odatle, za vrednost uslovne entropije jednog eksperimenta α pod uslovom realizacije drugog eksperimenta β važi Šenonova nejednakost: $0 \leq H(\alpha | \beta) \leq H(\alpha)$.
- o Analogno, Šenonova nejednakost važi i za vrednost uslovne entropije eksperimenta β pod uslovom realizacije eksperimenta α : $0 \leq H(\beta | \alpha) \leq H(\beta)$.

INFORMACIJA U ŠENONOVOJ TEORIJI

- Šenonovom nejednakosti $0 \leq H(\alpha | \beta) \leq H(\alpha)$ je iskazano da se realizacijom eksperimenta β umanjuje entropija, odnosno neodređenost eksperimenta α .
- Odatle, informacija, sa kvantitativne tačke gledišta se definiše kao količina informacije o posmatranom eksperimentu koja se sadrži u realizovanom eksperimentu.
- Količina informacije, sadržana u eksperimentu β o eksperimentu α , određena je sa

$$I(\beta, \alpha) = H(\alpha) - H(\alpha | \beta)$$
 gde je
 - $H(\alpha)$ entropija eksperimenta α ,
 - $H(\alpha | \beta)$ uslovna entropija eksperimenta α pod uslovom realizacije eksperimenta β .
- Zbog Šenonove nejednakosti, sledi da je $I(\alpha, \beta) \geq 0$.

25

UZAJAMNA INFORMACIJA

- Međutim, količina informacije koju eksperiment β sadrži o eksperimentu α jednaka je količini informacije koju eksperiment α sadrži o eksperimentu β , odnosno

$$I(\beta, \alpha) = H(\alpha) - H(\alpha | \beta) = H(\beta) - H(\beta | \alpha) = I(\alpha, \beta)$$
 to je sa $I(\alpha, \beta)$ određena količina uzajamne informacije dva eksperimenta u odnosu jedan prema drugom.
- Ako su α i β statistički nezavisni eksperimenti, tada je $H(\alpha | \beta) = H(\alpha)$ i $H(\beta | \alpha) = H(\beta)$, te je njihova uzajamna informacija jednaka 0, tj. $I(\alpha, \beta) = 0$.

26

POTPUNA INFORMACIJA

- Sa druge strane, kad se eksperiment α realizuje, onda je α potpuno određen, te je $H(\alpha | \alpha) = 0$.
- Odatle, neposredno sledi da je $I(\alpha, \alpha) = H(\alpha)$, gde je $I(\alpha, \alpha)$ potpuna informacija koja je sadržana u eksperimentu α .
- Time se ujedno potvrđuje da se entropija nekog eksperimenta α , $H(\alpha)$, može definisati kao maksimalna količina informacije koja može biti sadržana u eksperimentu α , odnosno kao potpuna informacija koja se dobije iz eksperimenta α .
- Na osnovu prethodnog, važi:

$$0 \leq I(\alpha, \beta) \leq H(\alpha) \text{ i } 0 \leq I(\alpha, \beta) \leq H(\beta).$$

27

RAZMATRANJE JEDNOG LOGIČKOG PROBLEMA

- Postavka problema: Osoba je zamislila jedan prirodan broj koji nije veći od datog broja $n > 0$. Ako osoba na pitanja odgovara sa "da" ili "ne", koliko je minimalno pitanja potrebno postaviti osobi da bismo tačno odredili broj koji je osoba zamislila?
- Rešenje: Neka je β eksperiment u kome se kao ishod registruje koji je prirodan broj osoba zamislila.
 - Tada β ima n mogućih ishoda B_j ; "Osoba je zamislila broj j ", $j = 1, \dots, n$.
 - Budući da je osoba mogla da zamisli bilo koji prirodan broj koji nije veći od $n > 0$, verovatnoće realizacija ishoda B_j su jednake i iznose $P(B_j) = 1/n$, $j = 1, \dots, n$.
 - Odatle, vrednost entropije eksperimenta β je maksimalna moguća i iznosi $H(\beta) = \log_2 n$.

28

REŠENJE: POSTAVKA EKSPERIMENTA U KOME SE REGISTRUJU ODGOVORI NA POSTAVLJENO PITANJE

- Sa druge strane, da bismo utvrdili koji je broj osoba zamislila, potrebno je da osobi postavimo određen broj pitanja.
- Označimo sa $k > 0$ broj pitanja koji treba postaviti osobi.
- Postavljanje pitanja koje ima dva moguća odgovora (tačan ili netačan) možemo opisati pomoću eksperimenta sa dva moguća slučajna ishoda {tačan, netačan}.
- Označimo sa α_i , i -ti od ukupno k uzastopnih eksperimenata sa dva moguća slučajna ishoda {tačan, netačan} koji se realizuju sa verovatnoćama p i q ($p+q=1$), respektivno.
- Budući da ishodi ne moraju da budu jednakoverovatni, neposredno sledi da je $H(\alpha_i) \leq 1 \text{ bita} = \log_2 2$, $i = 1, \dots, k$.

29

REŠENJE: ODREĐIVANJE MINIMALNOG BROJA PITANJA – I DEO

- Neka je $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$ niz od k uzastopnih pitanja sa dva moguća odgovora (tačan, netačan).
- Tada, iz $H(\alpha_i) \leq 1 = \log_2 2$, $i = 1, \dots, k$, sledi:

$$H(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) \leq H(\alpha_1) + H(\alpha_2) + \dots + H(\alpha_k) \leq k$$
- Iz osobine uzajamne informacije imamo da je

$$I(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k, \beta) \leq H(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)$$
- Odatle, $I(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k, \beta) \leq k$

30

REŠENJE: ODREĐIVANJE MINIMALNOG BROJA PITANJA – II DEO

- o Sa druge strane, da bi odgovori na niz pitanja $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ u potpunosti odredili ishod eksperimenta β , odnosno da bi $H(\beta | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = 0$ neophodno je da $H(\beta) = I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta)$.
- o Iz $\log_2 n = H(\beta) = I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta) \leq k$, odnosno iz $k \geq \log_2 n$, gde je $k > 0$ ceo broj, dobijamo koliko je minimalno pitanja potrebno postaviti osobi da bismo tačno odredili broj koji je zamislila.

31

POSTAVKA JEDNOG REALNOG PROBLEMA

- o U jednom vrtiću roditeljima se nudi ukupno 8 mogućih načina sprovođenja predškolskog programa koji predstavljaju kombinacije izbora između:
 - celodnevno ili četvoročasovno sprovođenja pripremnog predškolskog programa;
 - modela rada A ili B;
 - upoznavanja dece sa jednim ili dva strana jezika
- o Potrebno je utvrditi za koje načine rada su roditelji zainteresovani, te se u tom cilju, među njima sprovodi anketa.
- o Anketa se može sprovesti pomoću:
 - štampanog anketnog upitnika ili
 - elektronskog anketnog upitnika ili
 - strogo vezanog intervjua.
- o Najzastupljeniji način za prikupljanje podataka je štampani anketni upitnik.

32

MOGUĆI NAČINI SPROVOĐENJA PRIPREMNOG PREDŠKOLSKOG PROGRAMA

- 1 Celodnevni pripremni predškolski program koji se realizuje po modelu A i uključuje upoznavanje sa dva strana jezika.
- 2 Celodnevni pripremni predškolski program koji se realizuje po modelu A i uključuje upoznavanje sa jednim stranim jezikom.
- 3 Celodnevni pripremni predškolski program koji se realizuje po modelu B i uključuje upoznavanje sa dva strana jezika.
- 4 Celodnevni pripremni predškolski program koji se realizuje po modelu B i uključuje upoznavanje sa jednim stranim jezikom.
- 5 Četvoročasovni pripremni predškolski program koji se realizuje po modelu A i uključuje upoznavanje sa dva strana jezika.
- 6 Četvoročasovni pripremni predškolski program koji se realizuje po modelu A i uključuje upoznavanje sa jednim stranim jezikom.
- 7 Četvoročasovni pripremni predškolski program koji se realizuje po modelu B i uključuje upoznavanje sa dva strana jezika.
- 8 Četvoročasovni pripremni predškolski program koji se realizuje po modelu B i uključuje upoznavanje sa jednim stranim jezikom.

ZNAČAJ LOGIČKOG KONCEPTA OBRADE PODATAKA

- o Imajući u vidu moguće načine sprovođenja pripremnog predškolskog programa, anketni upitnik se može konstruisati i samo putem pitanja zatvorenog tipa sa 8 ponuđenih odgovora.
- o Međutim, takav upitnik jeste jednostavan za obradu podataka, ali je nepregledan za roditelje.
- o Odatle, anketni upitnik treba drugačije konstruisati, ali istovremeno je potrebno osmisliti i takvu obradu podataka da kao krajnji ishod dobijete koju od osam opcija je roditelj izabrao.
- o Koliko je značajna dobra formulacija pitanja i ponuđenih odgovora u anketnom upitniku, toliko je bitan i logički koncept obrade podataka.
- o Samo obradom podataka se dobijaju informacije.

34

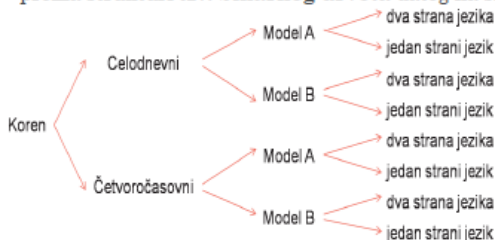
REŠENJE REALNOG PROBLEMA

- o Primetimo da svaki od roditelja može da izabere jednu od 8 mogućih opcija, odnosno da izabere jedan broj od 1 do 8.
- o Odatle, umesto liste sa ponuđenim odgovorima, možemo postaviti niz pitanja koji će nam na kraju dati tačan broj opcije koji je roditelj izabrao.
- o Obzirom da imamo 8 mogućih opcija, minimalan broj pitanja koje treba da postavimo je: $\log_2 8 = 3$ pitanja.
- o Imajući u vidu sadržaj opcija, pitanja se redom odnose na izbor između:
 1. celodnevno ili četvoročasovno sprovođenja pripremnog predškolskog programa;
 2. modela rada A ili B;
 3. upoznavanje sa jednim ili dva strana jezika.

35

BINARNO DRVO

- o Da bismo dobili tačne opcije koje su roditelji izabrali, logički koncept redosleda postavljanja pitanja/obrade podataka treba da bude takav da se odgovori daju/unose prema strukturi tzv. binarnog drveta datog na slici:



36

AKADEMIJA STRUKOVNIH STUDIJA ŠABAC
Odsek studija za vaspitače i medicinske sestre vaspitače
MATEMATIKA

7. EUKLIDSKA GEOMETRIJA

Uvod

Predavač: mr Tatjana Bajić

GEOMETRIJA

- Poreklo vuče iz starog Egipta - premeravanje zemljišta.
- Kao nauka, zasnovana je u staroj Grčkoj: gea - zemlja, metrio – merenje.
- Počinje da se koristi deduktivni metod (metod izvođenja i dokazivanja), kao i deduktivno zaključivanje.
- Euklid (III vek p.n.e.) - tvorac prvog aksiomatskog sistema u nauci.

2

REALNI OBJEKTI - GEOMETRIJSKO TELO

Svaki realan objekat

- ima sopstveni oblik
- zauzima određen položaj prema drugom objektu
- zauzima (zaprema) jedan deo prostora.

Odbacivanjem materijalnih odrednica realnih objekata (boja, hemijski sastav i sl.) i zadržavanjem samo pomenutih svojstava:

- oblika
- položaja i
- veličine zauzetog prostora

dolazimo do matematičkog pojma geometrijsko telo.

GEOMETRIJSKA POVRŠ

- Misaona granica između geometrijskog tela i prostora kome telo pripada je geometrijska površ.
- Granice realnih objekata mogu biti ravne i krive, odatle i površi mogu biti ravne i krive.

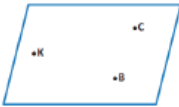
Geometrijska tela ograničena:

- samo ravnim površima nazivaju se rogljasta tela;
- bar jednom krivom površi su nerogljasta tela; tu spadaju valjkasta, kupasta i sferna geometrijska tela.

4

GEOMETRIJSKA RAVAN

- Zamišljenim "protezanjem" ravne površi po celom prostoru u dve dimenzije, dobijamo geometrijsku ravan.
- Kad se jedan deo ravni misaono izdvoji, dobijamo zatvorenu ograničenu ravnu površ.



GEOMETRIJSKA LINIJA

- Presekom dve površi misaono dobijamo geometrijsku liniju.
- Zavisno od vrste površi koje se seku, preseki mogu biti:
 - prava linija (dobija se u preseku ravnih površi)
 - kriva linija (dobija se u preseku površi od kojih je bar jedna kriva).



6

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

GEOMETRIJSKA PRAVA I DUŽ

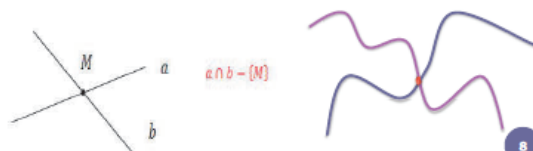
- Zamišljenim "produžavanjem" prave linije po celoj ravni u jednoj dimenziji, dobijamo geometrijsku pravu.
- Ako zamislimo da jedan deo prave izolujemo od ostalog dela, dobijamo zatvorenu, ograničenu pravu liniju koju nazivamo geometrijska duž.



7

GEOMETRIJSKA TAČKA

- Geometrijska tačka nema nijednu dimenziju i možemo je shvatiti:
 - kao granicu između duži i preostalog dela prave koja pripada duži ili
 - kao presek odnosno zajednički deo linija.



8

GEOMETRIJSKE FIGURE

- Geometrijska tela, površi, ravni, linije, prave, duži i tačke su matematički objekti odnosno nematerijalni, idealni objekti koji se mogu samo zamisliti ili predstaviti modelom i slikom.
- U geometriji takvi objekti se nazivaju geometrijske figure.
- Geometrijske figure - neprazni skupovi tačaka koji zadovoljavaju određene zakonitosti.
- Odatle, u geometriji se koriste pojmovi i simboli iz teorije skupova, relacijski simboli $=$, $\in$, $\subset$.

9

SAVREMENA EUKLIDSKA GEOMETRIJA

Formalna teorija koja se sastoji iz:

- skupa osnovnih pojmova i simbola
- skupa osnovnih stavova - aksioma
- skupa pravila izvođenja - zakona dokazivanja
- stavova kojima se nešto tvrdi i čije tvrđenje treba dokazati - teorema

10

OSNOVNI GEOMETRIJSKI POJMOVI I SIMBOLI

- tačke, koje obeležavamo velikim latinskim slovima A, B, C,...
- prave, koje obeležavamo malim latinskim slovima a, b, c,...
- ravni, koje obeležavamo malim grčkim slovima α , β , γ ,...
- (euklidski, trodimenzionalni) prostor E
- i relacije: između (·) i podudarno ($\cong$).
- Napomena: Oznaka A-O-B znači "tačka O je između tačaka A i B".

11

OSNOVNI STAVOVI - AKSIOME

Svrstani su u pet grupa:

- I Aksiome pripadanja (ili veze) – 7 aksioma
- II Aksiome rasporeda - 6 aksioma
- III Aksiome podudarnosti - 7 aksioma
- IV Aksiome neprekidnosti - 2 aksiome
- V Aksioma paralelnosti - 1 aksioma

12

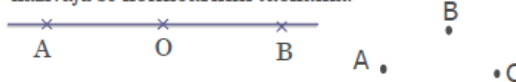
7.1 EUKLIDSKA GEOMETRIJA

Aksiome pripadanja
Aksiome rasporeda
Aksiome podudarnosti
Aksiome neprekidnosti
Aksioma paralelnosti

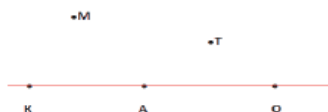
Predavač mr Tatjana Bajić

POJMOVI KOJI SE DEFINIŠU

- Tri ili više tačaka koje pripadaju istoj pravoj nazivaju se **kolinearnim tačkama**.



- Četiri ili više tačaka koje pripadaju istoj ravni nazivaju se **komplanarnim tačkama**.



14

I AKSIOME PRIPADANJA (ILI VEZE)

1. Svaka prava sadrži najmanje dve razne tačke.
2. Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke.
3. Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke.
4. Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke.
5. Ako dve razne tačke neke prave pripadaju jednoj ravni, onda svaka tačka te prave pripada istoj ravni.
6. Ako dve razne ravni imaju jednu zajedničku tačku, onda one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku.
7. Postoje bar četiri nekomplanarne tačke.

15

II AKSIOME RASPOREDA

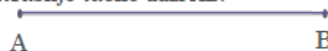
1. Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je A-B-C, tada su svake dve od tačaka A, B, C razne.
2. Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je A-B-C, tada je C-B-A.
3. Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je A-B-C, tada nije A-C-B.
4. Ako su A, B dve razne tačke, tada postoji tačka C takva da je A-B-C.
5. Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, tada je A-B-C ili B-C-A ili C-A-B.
6. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i p prava koja pripada ravni ABC, ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P takvoj da je B-P-C, tada prava p seče pravu CA u tački Q takvoj da je C-Q-A ili pravu AB u tački R takvoj da je A-R-B.

16

DUŽ, POLUPRAVA, POLURAVAN,
POLUPROSTOR
- DEFINICIJE -

DUŽ - DEFINICIJA

- Neka su A i B dve razne tačke.
- Skup tačaka, koji čine tačke A i B i sve tačke između njih na pravoj određenom tačkama A i B naziva se **duž**.
- Tačke A i B su **krajnje tačke**, a ostale tačke su **unutrašnje tačke duži AB**.



17

18

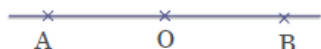
II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

POJMOVI SA RAZNIH STRANA TAČKE, SA ISTE STRANE TAČKE

Neka su O, A, B tri kolinearne tačke takve da je tačka O između tačaka A i B , u oznaci $A-O-B$.
 Tada kažemo da su tačke:

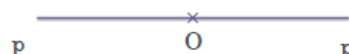
- A i B sa raznih strana tačke O ;
- O i B sa iste strane tačke A .



19

POLUPRAVA - DEFINICIJA

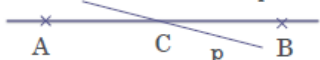
- Skup svih tačaka prave p sa iste strane tačke O je **poluprava** sa početnom tačkom O .
- Na svakoj pravoj p bilo koja tačka O određuje dve poluprave Op i Op' .



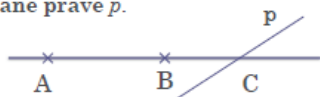
20

POJMOVI SA RAZNIH STRANA PRAVE, SA ISTE STRANE PRAVE

- Neka je p prava neke ravni δ i A i B dve razne tačke u ravni δ koje ne pripadaju pravoj p .
- Ako na pravoj p postoji tačka C takva da je $A-C-B$, onda su A i B sa raznih strana prave p .



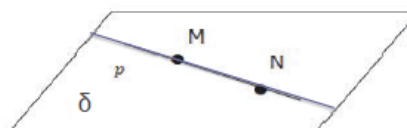
- Ako na pravoj p takva tačka C ne postoji, onda su A i B sa iste strane prave p .



21

POLURAVAN - DEFINICIJA

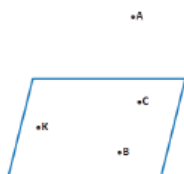
- Neka je p prava u ravni δ .
- Unija tačaka prave p i svih tačaka ravni δ sa iste strane prave p jeste **poluravan** $p\delta$ sa graničnom pravom p .
- Svaka prava p u ravni δ određuje dve poluravni $p\delta$ i $p\delta'$.
- Napomena: Slično se definišu pojmovi sa raznih strana ravni i sa iste strane ravni.



22

POLUPROSTOR - DEFINICIJA

- Neka je δ ravan u prostoru E .
- Unija tačaka ravni δ i svih tačaka prostora E sa iste strane ravni δ jeste **poluprostor** δE sa graničnom ravni δ .
- Svaka ravan δ u prostoru E deli prostor E na dva poluprostora.



23

KONVEKSNOŠĆ I KONKAVNOŠĆ - DEFINICIJA

Geometrijska figura F je

- **konveksna** ako za svake dve tačke A i B koje pripadaju figuri F , duž AB pripada figuri F ;
- **nekonveksna (konkavna)** ako taj uslov nije ispunjen.

24

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

III AKSIOME PODUDARNOSTI

1. Ako su A, B, C, D tačke takve da je $AB \cong CD$ i $A=B$, tada je $C=D$.
2. Ako su A i B bilo koje dve tačke, tada je $AB \cong BA$.
3. Ako su A, B, C, D, E, F tačke takve da je $AB \cong CD$ i $AB \cong EF$, tada je $CD \cong EF$.
4. Ako su C i C' tačke dveju otvorenih duži, AB i $A'B'$, takve da je $AC \cong A'C'$ i $BC \cong B'C'$, tada je $AB \cong A'B'$.

25

III AKSIOME PODUDARNOSTI

5. Ako su A i B dve razne tačke i C teme neke poluprave, tada na toj polupravoj postoji tačka D takva da je $AB \cong CD$.
6. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i A', B' tačke ruba neke poluravni takve da je $AB \cong A'B'$, tada u toj poluravni postoji jedinstvena tačka C' takva da je $AC \cong A'C'$ i $BC \cong B'C'$.
7. Ako su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka i D i D' tačke polupravih BC i $B'C'$ takve da je $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$ i $BD \cong B'D'$, tada je $AD \cong A'D'$.

26

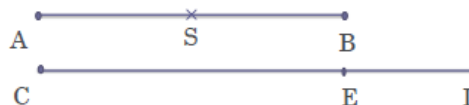
POSLEDICE AKSIOMA PODUDARNOSTI (DOKAZUJU SE)

- Dve ravanske figure su podudarne ako se premeštanjem mogu dovesti do poklapanja.
- Relacija podudarnosti duži (kao i podudarnosti figura uopšte) je **relacija ekvivalencije**.
- Ako je AB duž i A' početna tačka poluprave $A'p$, tada na polupravoj $A'p$ postoji samo jedna tačka B' , takva da je $AB \cong A'B'$.
- Ako su A, B, C tri razne tačke prave p i A' i B' dve razne tačke prave p' takve da $AB \cong A'B'$, tada postoji tačka C' prave p' takva da je $AC \cong A'C'$ i $BC \cong B'C'$.

27

DEFINICIJE NEKIH POJMOVA VEZANIH ZA DUŽ

- Ako je S tačka i AB duž takva da je $S \in AB$ i $AS \cong BS$, tada je tačka S **središte duži** AB .
- Ako su AB i CD dve duži i ako unutar duži CD postoji tačka E takva da je $AB \cong CE$, tada kažemo da je duž AB manja od duži CD ($AB < CD$) ili da je duž CD veća od duži AB ($CD > AB$).



28

DEFINICIJA OPERACIJA SABIRANJA I ODUZIMANJA DUŽI

Neka su AB i CD dve proizvoljne duži. Ako na nekoj duži EF postoji tačka G takva da je:

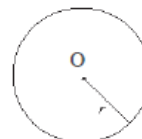
- $E-G-F$ i $AB \cong EG$ i $CD \cong GF$, tada je duž EF podudarna sa **zbirom duži AB i CD** , što zapisujemo $EF \cong AB + CD$.
- $E-F-G$ i $AB \cong EG$ i $CD \cong FG$, tada je duž EF podudarna sa **razlikom duži AB i CD** , što zapisujemo $EF \cong AB - CD$.



29

DEFINICIJA KRUŽNICE

- Ako su AB i AC dve podudarne duži ($AB \cong AC$) sa zajedničkom krajnjom tačkom A , tada kažemo da su tačke B i C **jednako udaljene od tačke A** .
- Skup tačaka u ravni, jednako udaljenih od jedne tačke O te ravni, naziva se **kružnica**.
- Tačka O je **centar (središte) kružnice**, a odstojanje centra od bilo koje tačke na kružnici je **poluprečnik kružnice r** .



30

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

DEFINICIJA KRUGA

Neka je O tačka u ravni i r data duž.

- Skup tačaka M u ravni sa svojstvom da je $OM \leq r$ jeste **krug**.

Odnosno,

- Unija tačaka kružnice i svih tačaka u njenoj unutrašnjosti je **krug**.

Oznaka za **kružnicu**: $k(O,r)$
odnosno za **krug**: $K(O,r)$.



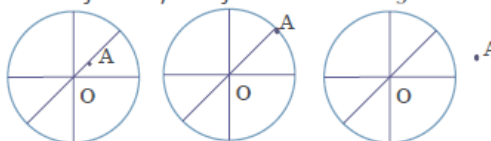
31

POLOŽAJ TAČKE PREMA KRUGU

Neka je $K(O,r)$ dati krug.

- Odstojanje tačke A od centra kruga O naziva se njeno **centralno odstojanje** OA .

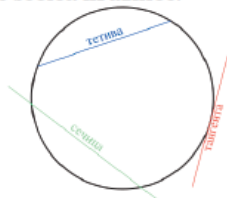
- Ako je $OA < r$, tada je tačka A u krugu.
- Ako je $OA = r$, tada je tačka A na kružnici.
- Ako je $OA > r$, tada je tačka A van kruga.



32

SEČICA I TANGENTA - DEFINICIJE

- Prava koja sa kružnicom/krugom ima jednu zajedničku tačku naziva se **dirka** ili **tangenta** kružnice/kruga.
- Prava koja sa kružnicom ima dve zajedničke tačke naziva se **sečica** kružnice.



33

IV AKSIOME NEPREKIDNOSTI

1. Arhimed-Eudoksova aksioma

Ako su AB i CD dve proizvoljne duži, tada na polupravoj AB postoji konačan niz tačaka $A_1, A_2, \dots, A_n$ takvih da je $A_1A_2 \dots A_n$ pri čemu je svaka od duži $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ podudarna duži CD i $A-B-A_n$.

2. Kantorova aksioma

Ako je $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$ niz duži neke prave takvih da svaka od tih duži sadrži sledeću, tada postoji tačka X koja pripada svakoj duži tog niza.

34

V AKSIOMA PARALELNOSTI

Plejferova aksioma

Za svaku pravu a i tačku B van nje, u ravni određenoj pravom a i tačkom B , postoji jedna i samo jedna prava b koja sadrži tačku B i koja sa pravom a nema zajedničkih tačaka.

$B \cdot$



35

PARALELNOST PRAVIH – DEFINICIJA

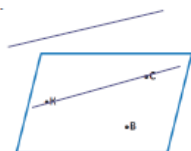
- Prave a i b su **paralelne**, u oznaci $a \parallel b$, ako i samo ako je
 - $a=b$ (odnosno prave a i b se poklapaju) ili
 - prave a i b pripadaju istoj ravni i nemaju zajedničkih tačaka.
- Dve paralelne (različite) prave određuju jednu i samo jednu ravan.



36

PARALELNOST PRAVE I RAVNI - DEFINICIJA

- Prava je paralelna sa ravni ako joj pripada ili sa njom nema zajedničkih tačaka.
- Dve ravni su paralelne ako su identične ili ako nemaju zajedničkih tačaka.
- Može se dokazati da je relacija paralelnosti ravni relacija ekvivalencije.



37

7.2 EUKLIDSKA GEOMETRIJA PLANIMETRIJA

Predavač: mr Tatjana Bajić

38

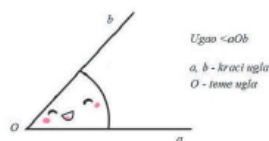
PLANIMETRIJA

- Planimetrija (latinski planum - ravan, grčki μετρον - merim) predstavlja deo euklidske geometrije u kojem se izučavaju svojstva figura koje leže u ravni, odnosno ravanskih figura.
- Razmatramo sledeće ravanske figure:
 - Ugao
 - Mnogougao
 - Trougao
 - Četvorougao (razmatramo samo konveksne četvorouglove)
 - paralelogram
 - pravougao
 - kvadrat
 - romb
 - trapez (jednakokraki trapez, pravougli trapez)
 - trapezoid (deltoid)

39

DEFINICIJA UGLA

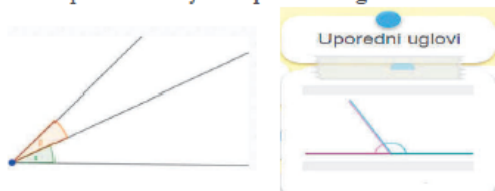
- Unija dve poluprave Oa i Ob sa zajedničkom početnom tačkom O jeste ugaona linija aOb .
- Poluprave Oa i Ob su kraci ugla, a tačka O je teme ugla.
- Unija ugaone linije aOb i jedne od ugaonih oblasti određenih ovom ugaonom linijom je ugao $\sphericalangle aOb$.



40

VRSTE UGLOVA – SUSEDNI I UPOREDNI UGLOVI

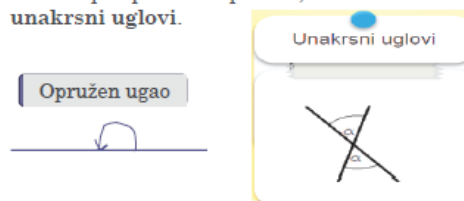
- Neka poluprava Or pripada oblasti ugla $\sphericalangle pOq$. Uglovi $\sphericalangle pOr$ i $\sphericalangle rOq$ koji pored kraka Or nemaju drugih zajedničkih tačaka su susedni uglovi.
- Dva susedna ugla čiji slobodni kraci su poluprave iste prave nazivaju se uporedni uglovi.



41

VRSTE UGLOVA – OPRUŽEN UGAO I UNAKRSNI UGLOVI

- Ugao čiji kraci obrazuju pravu (ili oblast ugla je poluravan) je opružen ugao.
- Uglovi $\sphericalangle pOq$ i $\sphericalangle p'Oq'$ čiji kraci su Op i Op' različite poluprave iste prave a , a kraci Oq i Oq' različite poluprave iste prave b , zovu se unakrsni uglovi.

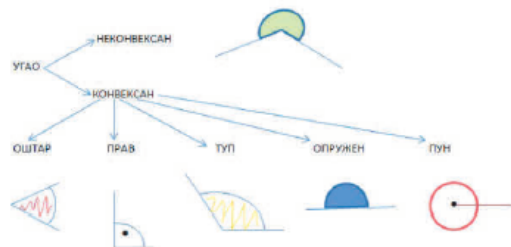


42

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

VRSTE UGLOVA - ILUSTRACIJE



- Ugao jednak svom uporednom uglu je **prav ugao**, a prave koje ih obrazuju su **uzajamno normalne prave**.
- Ugao manji od pravog ugla naziva se **oštar ugao**.
- Ugao veći od pravog ugla, a manji od opruženog ugla naziva se **tup ugao**.

43

PRODOR PRAVE KROZ RAVAN

- Ako prava i ravan imaju jednu zajedničku tačku, tada kažemo da prava **prodire ravan**.
- Ako je prava koja prodire ravan, normalna na bar dve prave te ravni koje prolaze kroz njen prodor, tada kažemo da je prava **normalna na ravan**.



44

MNOGOUGAONA LINIJA - DEFINICIJA

Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 3$) konačan skup tačaka u ravni, tako da nikoje tri uzastopne tačke nisu kolinearne. Unija duži $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ naziva se **izlomljena linija**.

Ako je:

- $A_1 \neq A_n$ izlomljena linija je **otvorena**
- $A_1 \equiv A_n$ izlomljena linija je **zatvorena** ili **mnogougona linija**.

Tačke $A_1, A_2, \dots, A_n$ su **temena**, a duži $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ su **stranice** izlomljene linije.

45

MNOGOUGAO - DEFINICIJA

- Mnogougao je unija tačaka mnogougona linije i unutrašnje oblasti.

Mnogougao može biti:

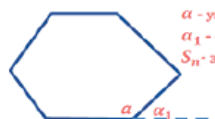
- prost** (ako nikoje dve stranice nemaju zajedničkih tačaka, sem što svake dve susedne stranice imaju zajedničko teme)
- složen** (u suprotnom).



46

UGLOVI MNOGOUGLA

- Dve susedne stranice mnogougla obrazuju ugaonu liniju koja određuje dva ugla:
 - unutrašnji ugao mnogougla** (ugao koji sadrži unutrašnje tačke mnogougla);
 - spoljašnji ugao mnogougla** (naporedan ugao unutrašnjem uglu).



α - унутрашњи угао многоугла
 α_1 - спољашњи угао многоугла
 S_n - збир унутрашњих углова многоугла

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$$

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

47

KLASIFIKACIJA MNOGOUGLOVA

Mnogouglovi se mogu klasifikovati prema:

- Broju stranica (odnosno temena i uglova) - trouglovi, četvorouglovi, petouglovi, ..., n-touglovi.
- Odnosu stranica i uglova na - **pravilne** i **nepravilne**: Mnogougao je **pravilan** ako su mu sve stranice jednake i svi unutrašnji uglovi jednaki. U suprotnom je **nepravilan mnogougao**.
- Konveksnosti - **konveksne** i **nekonveksne**



48

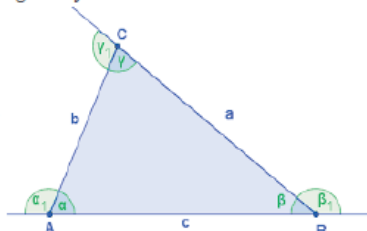
II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

TROUGAO - DEFINICIJA

Trougao je mnogougao koji ima

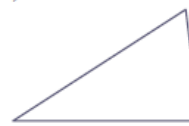
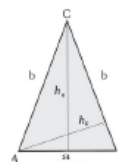
- tri stranice i
 - tri ugla,
- odnosno svojstva:
- trostraničnost i
 - trougaonost.



49

PODELA TROUGLOVA PREMA ODNOSU STRANICA

- **Jednakostranični trouglovi** (sve tri stranice su podudarne i odatle je pravilan mnogougao).
- **Jednakokraki trouglovi** (imaju dve stranice koje su podudarne i nazivamo ih kracima, a treću stranicu osnovicom).
- **Nejednakostranični trouglovi** (nemaju ni jedan par podudarnih stranica).



50

PODELA TROUGLOVA PREMA VRSTI UGLOVA

- **Oštrougli trouglovi** (svi uglovi su manji od pravog ugla odnosno oštri su).
- **Pravougli trouglovi** (imaju jedan prav ugao, a druga dva su oštra).
 - Stranica naspram pravog ugla je najveća i naziva se hipotenuza, a ostale dve stranice se nazivaju katete;
 - Za pravougli trougao važi Pitagorina teorema: $a^2 + b^2 = c^2$.
- **Tupougli trouglovi** (jedan ugao je tup, a druga dva su oštra).



OŠTROUGLI
TROUGAO



PRAVOUGLI
TROUGAO

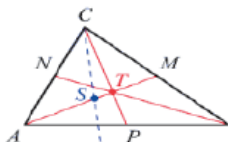


TUPOUGLI
TROUGAO

51

NEKA SVOJSTVA TROUGLA

- U bilo kom trouglu naspram veće stranice je veći ugao i obrnuto.
- U jednakokrakom trouglu naspram podudarnih stranica su podudarni uglovi.
- Svaka stranica trougla je manja od zbira druge dve, a veća od njihove razlike.
- Zbir uglova u trouglu jednak je opruženom uglu.



52

ČETVOROUGAO

- Četvorougao je mnogougao koji ima:
 - četiri stranice i
 - četiri ugla.
- Zbir unutrašnjih uglova jednak je dva opružena ugla.

Napomena:

Nadalje razmatramo samo konveksne četvorouglove.

53

KLASIFIKACIJA ČETVOROUGLOVA

Prema broju parova paralelnih stranica:

- **paralelograme** (imaju dva para paralelnih stranica)
 - **pravougaonik** (Paralelogram kod koga je jedan ugao prav.)
 - **kvadrat** (Jednakostranični pravougaonik.)
 - **romb** (Jednakostranični paralelogram.)
- **trapeze** (imaju jedan par paralelnih stranica)
 - **jednakostranični trapez** (Trapez čiji su kraci jednaki.)
 - **pravougli trapez** (Trapez čiji je jedan krak normalan na osnovice.)
- **trapezoide** (nemaju paralelnih stranica)
 - **deltoid** (Trapezoid kod koga su dve i dve susedne stranice jednake.)

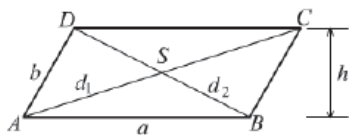
54

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

PARALELOGRAM

- Paralelogram je četvorougao koji ima dva para paralelnih stranica.
- Svojstva paralelograma
 - Dve po dve naspramne stranice su paralelne i jednake.
 - Dijagonale se polove.
 - Susedni uglovi su suplementni odnosno njihov zbir jednak je opruženom uglu.



55

PRAVOUGAONIK, KVADRAT I ROMB - DEFINICIJE

- Pravougaonik** je paralelogram kod koga je jedan ugao prav.
- Kvadrat** je jednakostranični pravougaonik.
- Romb** je jednakostranični paralelogram.

Svaki paralelogram je centralnosimetrična figura.

PRAVOUGAONIK



KVADRAT



ROMB



56

DIJAGONALE PARALELOGRAMA

- Kod jednakostraničnih paralelograma (jednakostraničnog pravougaonika-kvadrata i romba), dijagonale su normalne i predstavljaju ose simetrije.
- Kod pravougaonika dijagonale su podudarne.
- Odatle, dijagonale kvadrata su podudarne, normalne i predstavljaju ose simetrije.

PRAVOUGAONIK



KVADRAT



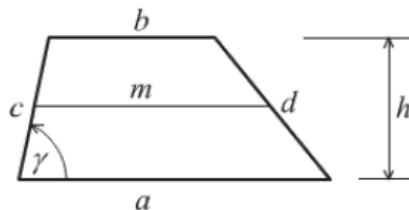
ROMB



57

TRAPEZ - DEFINICIJA

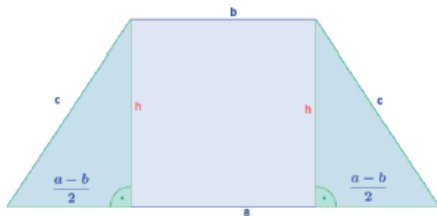
- Trapez je četvorougao koji ima jedan par paralelnih stranica.
- Paralelne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dve kraci trapeza.



58

JEDNAKOKRAKI TRAPEZ

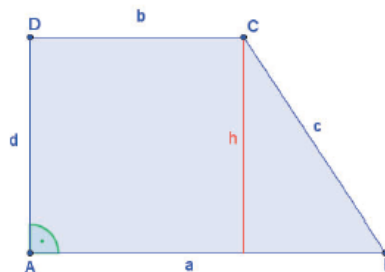
- Trapez čiji su kraci jednaki naziva se jednakokraki trapez.



59

PRAVOUGLI TRAPEZ

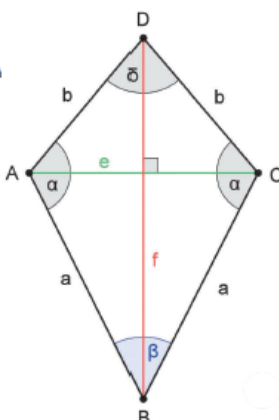
- Trapez čiji je jedan krak normalan na osnovice naziva se pravougli trapez.



60

DELTOID - DEFINICIJA

- Trapezoid je četvorougao koji nema paralelnih stranica.
- **Deltoid** je trapezoid kod koga su dve i dve susedne stranice jednake.
- Svojstva **deltoida**:
 - Dijagonale deltoida su uzajamno normalne.
 - Dijagonala koja spaja temena u kojima se sastaju podudarne stranice je osa simetrije deltoida i druge dijagonale.



7.3 EUKLIDSKA GEOMETRIJA

Stereometrija

PREDAVAČ: MR TATJANA BAJIĆ

STEREOMETRIJA

- Stereometrija je termin izveden od grčkih reči στερεος-prostorni i μετρο-merim.
- Stereometrija predstavlja deo euklidske geometrije koja izučava svojstva
 - geometrijskih tela (tela u prostoru) i
 - onih prostornih figura čije se sve tačke ne nalaze u jednoj ravni.
- Osnovna podela geometrijskih tela u prostoru je na:
 - rogljasta (gde spadaju poliedri) i
 - nerogljasta (gde spadaju obrtna tela).

63

GEOMETRIJSKA TELA

- Pored geometrijskih figura u prostoru, čije se sve tačke ne nalaze u jednoj ravni - diedar, rogalj i prosta, zatvorena poliedarska površ, razmatramo sledeća geometrijska tela:
 - Poliedre
 - **Prizme**
 - paralelepiped
 - kvadar
 - kocka (heksaedar)
 - **Piramide**
 - tetraedar
 - pravilna četvorostrana piramida
 - Obrtna tela
 - prav valjak
 - prava kupa
 - lopta

64

DIEDAR - DEFINICIJA

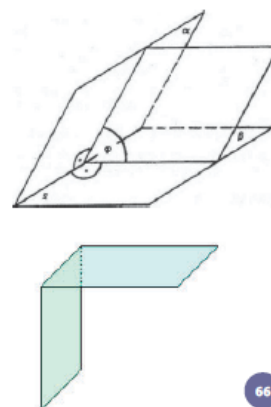
- Unija dve poluravni sa zajedničkom graničnom pravom jeste **diedarska površ** koja prostor deli na dve oblasti.
- Poluravni su strane, a zajednička prava je ivica diedarske površi.
- Diedar je unija diedarske površi i jedne od oblasti na koje ona deli prostor.
- Dve ravni koje se seku obrazuju 4 diedra.



65

UGAO DIEDRA

- Diedri mogu biti: konveksni i nekonveksni, susedni, uporedni, unakrsni i sl.
- Ugao diedra je ugao čiji su kraci dve poluprave koje su normalne na ivicu diedra u istoj tački, a pripadaju raznim stranama diedra.
- Ako je ugao diedra prav onda i za diedar kažemo da je prav.



66

II deo predavanja iz MATEMATIKE

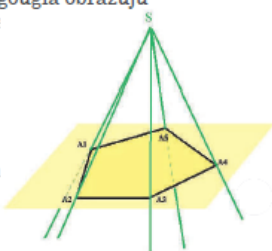
Predavač: mr Tatjana Bajić

ROGLJ - DEFINICIJA

- o Neka je $A_1A_2...A_n$ mnogougao i S tačka van ravni tog mnogougla.
- o Skup svih polupravih sa početkom u S , koje sadrže po jednu tačku mnogougla obrazuju geometrijsku figuru koja se

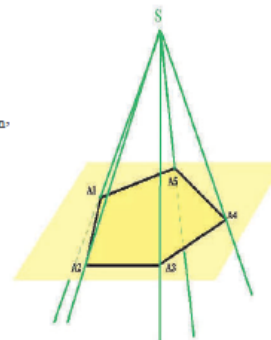
U zavisnosti od mnogougla, roglj može biti:

- o prost ili složen;
- o konveksan ili nekonveksan
- o n -tostran, $n=3,4,5,...$



ELEMENTI ROGLJA

- o tačka S je teme roglja
- o poluprave $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ su ivice roglja
- o uglovi $\angle A_1SA_2, \angle A_2SA_3, ..., \angle A_{n-1}SA_n$ su ivični uglovi roglja
- o svaka dva susedna ivična ugla obrazuju diedar roglja.



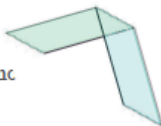
68

PROSTA POLIEDARSKA POVRŠ

Prosta poliedarska površ je unija konačnog

broja mnogouglova, takvih da:

- o Svaka stranica mnogougla pripada samom mnogouglu ili najviše još jednom susednom mnogouglu;
- o Svaka dva susedna mnogougla pripadaju dvema različitim ravnima;
- o Svaka dva mnogougla mogu se povezati nizom mnogouglova iz tog skupa tako da svaka dva uzastopna člana tog niza budu susedni.



69

VRSTE POLIEDARSKJE POVRŠI

Prosta poliedarska površ može biti:

- o otvorena, ako postoje stranice koje pripadaju samo jednom mnogouglu;
- o zatvorena, ako je svaka stranica zajednička za dva mnogougla.

Elementi proste poliedarske površi:

- o mnogouglovi su strane (pljosni) poliedarske površi;
- o stranice mnogouglova su ivice poliedarske površi;
- o temena mnogouglova su temena poliedarske površi.

70

PROSTA, ZATVORENA POLIEDARSKA POVRŠ

Prosta, zatvorena poliedarska površ razdvaja prostor na dva disjunktne skupa tačaka:

- o spoljašnju oblast i
- o unutrašnju oblast poliedarske površi.

71

SPOLJAŠNJA I UNUTRAŠNJA OBLAST POLIEDARSKJE POVRŠI

- o Spoljašnja oblast poliedarske površi predstavlja skup tačaka sa osobinom da za svaku od njih postoji prava koja sa poliedarskom površi nema zajedničkih tačaka.
- o Unutrašnja oblast poliedarske površi predstavlja skup tačaka takvih da za svaku od njih postoji prava koja sa poliedarskom površi ima
 - dve zajedničke tačke - konveksna poliedarska površ ili
 - više zajedničkih tačaka - nekonveksna poliedarska površ.

72

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

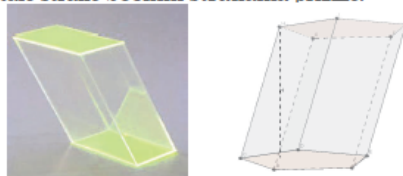
POLIEDAR - DEFINICIJA

- Poliedar je unija proste, zatvorene poliedarske površi i njene unutrašnje oblasti.
- Poliedri su rogljasta tela.
- Odnos između broja strana (p), temena (t) i ivica (i) poliedra:
$$t+p=i+2 \text{ (Ojler).}$$
- Značajni poliedri: prizme i piramide

73

PRIZMA - DEFINICIJA

- Poliedar koji ima $n+2$ strane, od kojih su
 - 2 strane paralelne i podudarni n -touglovi, a
 - n strana su paralelogrami,
 naziva se prizma.
- Paralelne strane prizme nazivamo osnovama, a ostale strane bočnim stranama prizme.



74

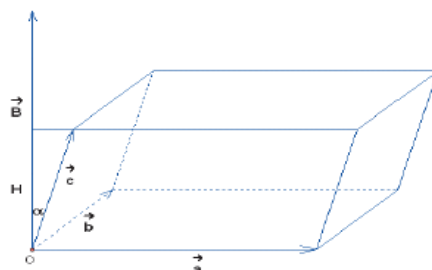
KLASIFIKACIJA PRIZMI

- Prema broju osnovnih ivica odnosno bočnih strana - na trostrane, četvorostane,...
- Prema odnosu bočnih ivica i osnova - na prave i kose:
 - Prava prizma je prizma čiji su sve bočne ivice normalne na ravni osnova, odnosno kod koje su sve bočne ivice jednake visini prizme.
 - Ako bočne ivice prizme nisu normalne na ravni osnova, prizma je kosa.
- Posebno ističemo pojam pravilne prizme:
 - Pravilna prizma je prava prizma čija su osnove pravilni mnogouglovi.

75

PARALELEPIPED - DEFINICIJE

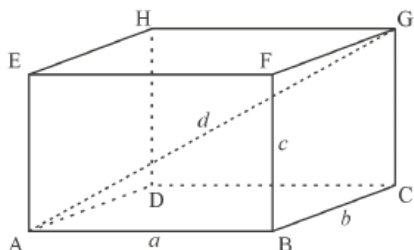
- Četvorostana prizma čije su sve strane paralelogrami je paralelepiped.



76

KVADAR - DEFINICIJE

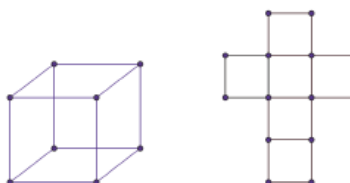
- Paralelepiped čije su sve strane pravougaonici je pravougli paralelepiped odnosno kvadar.



77

KOCKA - DEFINICIJA

- Kocka je kvadar čije su sve ivice jednake odnosno čije su sve strane podudarni kvadrati.
- Kocka je četvorostana pravilna prizma čije su sve strane podudarni kvadrati.



78

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

PIRAMIDA - DEFINICIJA

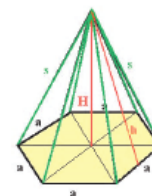
- Poliedar koji ima $n+1$ stranu od kojih je
 - jedna n -tougao, a
 - ostalih n strana su trouglovi sa jednim zajedničkim temenom
 naziva se **piramida**.
- Trougaone površi piramide nazivaju se bočne strane, a n -tougao osnova n -tostrane piramide.



79

KLASIFIKACIJA PYRAMIDA

- Na prave i kose:
 - Prava piramida je piramida čije su sve bočne ivice jednake.
 - Inače je kosa.
- Posebno izdvajamo pojam pravilne piramide:
 - Pravilna piramida je prava piramida čija je osnova pravilan n -tougao.



80

TETRAEDAR - DEFINICIJA

- Trostrana piramida zove se tetraedar.
- Tetraedar čije su sve 4 strane jednakokranični trouglovi jeste pravilan tetraedar.



Model pravilnog tetraedra u prostoru

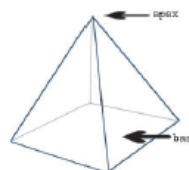


Mreža pravilnog tetraedra u ravni

81

PRAVILNA ČETVOROSTRANA PYRAMIDA

- Pravilna četvorostrana piramida je prava piramida čija je osnova kvadrat.
- Bočne strane pravilne četvorostrane piramide su podudarni jednakokraki ili jednakokranični trouglovi.



82

PRAVILNI POLIEDRI - DEFINICIJA

Poliedri koji su:

- ograničeni podudarnim, pravilnim mnogouglovima,
 - svi diedri su im jednaki, i
 - u svakom temenu se sastaje isti broj ivica
- nazivaju se **pravilni poliedri**.

Ukupan broj pravilnih poliedara je ograničen jer:

- zbir ivičnih uglova (unutrašnjih uglova mnogougla) kod jednog temena poliedra mora biti manji od 4 prava ugla i
- broj ivičnih uglova kod jednog temena ne može biti manji od 3.

83

PRAVILNI POLIEDRI

- pravilan tetraedar, oktaedar, ikosaedar (strane su podudarni jednakokranični trouglovi)
- heksaedar, koji se češće naziva kocka (svih šest strana su podudarni kvadrati)
- dodekaedar (strane su mu 12 podudarnih petouglova)

84

II deo predavanja iz MATEMATIKE

Predavač: mr Tatjana Bajić

Pet pravilnih poliedara

Pet pravilnih poliedara					
Ime	Tetraedar	Heksaedar ili kocka	Oktaedar	Dodekaedar	Ikosaedar
Slika					
	(tetraedar)	(heksoedar)	(oktaedar)	(dodekaedar)	(ikosaedar)
Razmotana figura					
Površ	4 trougla	6 kvadrata	8 trouglova	12 petouglova	20 trouglova
Broj kica/tačana	6 / 4	12 / 8	12 / 6	30 / 20	30 / 12
Broj kica u jednom temenu	3	3	4	3	5

85

NEROGLJASTA TELA-DEFINICIJA

OBRTNA TELA-DEFINICIJA

- Geometrijska tela čija bar jedna površ nije ravna nazivaju se **nerogljasta tela**.
- Geometrijska figura dobijena obrtanjem neke površi oko prave (koja se zove osa obrtanja) jeste **obratno telo**.
- Obrtna tela spadaju u nerogljasta tela.

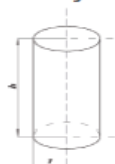
Značajna obrtna tela:

- Prav valjak** - nastaje obrtanjem pravougaonika oko jedne svoje stranice
- Prava kupa** - nastaje obrtanjem pravouglog trougla oko jedne katete
- Lopta** - nastaje obrtanjem kruga oko svog prečnika; Površ lopte naziva se sfera.

86

PRAV VALJAK, PRAVA KUPA I LOPTA

Prav valjak



Prava kupa



Lopta



87

MATEMATIKA

- Ispitna pitanja -

I deo - Uvod u matematičku logiku

1. Matematički objekat. Matematički pojam
2. Rodni (generički) pojam i vrsni pojam.
3. Simboli matematičkih pojmova
4. Matematičko - logički jezik. Strogo formalna teorija.
5. Definicija. Struktura definicije. Definicija - svojstva
6. Iskaz. Premisa, zaključivanje i zaključni sud
7. Neposredni zaključak. Posredni zaključak (induktivni, deduktivni i analogijski). Zaključivanje po intuiciji
8. Istinitosna vrednost iskaza
9. Logičke operacije. Istinitosne tablice
10. Iskazne formule. Tautologija - definicija
11. Zakon kontrapozicije. Zakon svodjenja na apsurd
12. Univerzalni i egzistencijalni kvantifikator.

II deo - Skup kao osnovni matematički pojam

1. Pojam skupa. Pojam pripada.
2. Klasifikacija skupova prema broju elemenata. Prazan skup
3. Načini predstavljanja skupova
4. Kardinalni broj skupa. Prebrojivi skupovi
5. Podskup. Jenakost skupova
6. Prazan skup. Disjunktne skupovi
7. Partitivni skup
8. Unija, presek, razlika i simetrična razlika skupova. Komplement skupa
9. Uredjen par
10. Dekartov proizvod
11. Vrste relacija. Binarna relacija
12. Relacija na skupu. Binarna relacija na skupu
13. Prazna i puna relacija. Svojstva binarnih relacija
14. Relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije i količinski skup
15. Relacija poretka. Relacija totalnog poretka
16. Funkcija (preslikavanje) - definicija i načini zadavanja

17. Preslikavanje i relacija - odnos
18. Injektivno, surjektivno i bijektivno preslikavanje
19. Inverzno preslikavanje
20. Kompozicija preslikavanja
21. Pojam operacije. Operacije na skupu
22. Binarne operacije i njihovo predstavljanje
23. Operacije i relacije - odnos
24. Algebarski zakon - definicija i primeri
25. Algebarska struktura - definicija

III deo - Skup prirodnih brojeva

1. Ekvivalentni skupovi. Predstavnic klase ekvivalencije
2. Prirodni brojevi - definicija. Skup prirodnih brojeva
3. Pojmovi sledbenik i prethodnik - definicija
4. Peanova aritmetika - skup osnovnih pojmova i simbola, skup aksioma
5. Princip indukcije
6. Relacija " $<$ " u Peanovoj aritmetici
7. Operacije sabiranja i množenja u Peanovoj aritmetici
8. Operacije oduzimanja i deljenja u Peanovoj aritmetici
9. Zapisivanje prirodnih brojeva
10. Cifre rimskog nepozicionog brojevnog sistema
11. Pozicioni brojevni sistemi. Dekadni brojevni sistem i binarni brojevni sistem

IV deo - Mera i broj

1. Mera na skupu - definicija
2. Jedinica mere (merna jedinica) fizičke veličine - definicija. Nazivi nekih mernih jedinica
3. Merenje. Merni broj. Merna jedinica i merni broj fizičke veličine
4. Izbor merne jedinice. Sistem mera
5. SI-sistem. Osnovne i dopunske merne jedinice

6. Masa i težina

V deo – Pojam verovatnoće

1. Eksperiment sa slučajnim ishodima.
2. Slučajan događaj
3. Verovatnoća realizacije slučajnog događaja
4. Uslovne verovatnoće
5. Presek događaja i pravilo množenja verovatnoća. Nezavisnost događaja.
6. Marginalne verovatnoće
7. Unija događaja i pravilo sabiranja verovatnoća

VI deo - Kvantitativno izražavanje informacije: Šenonova teorija

1. Osnovni koncept Šenonove teorije
2. Pojam entropije-definicija i primeri
3. Izražavanje vrednosti entropije-merna jedinica
4. Uslovna entropija-definicija i primeri
5. Šenonova nejednakost
6. Uzajamna informacija-definicija i primeri

VII deo - Euklidska geometrija

1. Geometrijske figure
2. Osnovni pojmovi i simboli Euklidske geometrije
3. Osnovni stavovi - aksiome Euklidske geometrije (broj i nazivi grupa aksioma)
4. Kolinearnost tačaka - definicija. Komplanarnost tačaka - definicija
5. Definicija duži. Definicija pojmova *sa raznih strana tačke, sa iste strane tačke*
6. Definicija poluprave. Definicija pojmova *sa raznih strana prave, sa iste strane prave*
7. Definicija poluravni. Definicija poluprostora

8. Konveksnost i konkavnost geometrijske figure
9. Središte duži, upoređivanje duži (manja, veća), operacije sabiranja i oduzimanja duži - ilustracije na primerima
10. Definicija kružnice
11. Definicija kruga. Položaj tačke prema krugu
12. Sečica i tangenta - definicije
13. Paralelnost pravih - definicija. Paralelnost prave i ravni - definicija
14. Prodor prave kroz ravan
15. Definicija ugla
16. Susjedni uglovi, uporedni uglovi, prav ugao, opružen ugao, unakrsni uglovi - definicije
17. Mnogougona linija - definicija. Mnogougao - definicija
18. Uglovi mnogougla
19. Klasifikacija mnogouglova
20. Trougao - definicija. Podela trouglova prema odnosu stranica
21. Podela trouglova prema vrsti uglova. Neka značajna svojstva trouglova
22. Četvorougao - definicija. Klasifikacija četvorouglova
23. Svojstva paralelograma
24. Pravougaonik, kvadrat i romb - definicije
25. Trapez - definicija
26. Deltoid – definicija
27. Diedar - definicija. Ugao diedra
28. Rogalj - definicija. Elementi roglja
29. Elementi proste poliedarske površi
30. Poliedar - definicija
31. Prizma - definicija. Klasifikacija prizmi
32. Paralelopiped, kvadar i kocka - definicije
33. Piramida - definicija. Klasifikacija piramida
34. Tetraedar - definicija
35. Pravilan poliedar - definicija. Pravilni poliedri
36. Obrtna tela-definicija. Valjak, kupa i lopta

Predmetni nastavnik
mr Tatjana Bajić, prof.-predavač

АКАДЕМИЈА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА ШАБАЦ
Одсек студија за васпитаче и медицинске сестре васпитаче
МАТЕМАТИКА
III семестар

План наставе (15 наставних недеља по 2 часа предавања и 2 часа вежбања):

- 1. Упознавање студената са циљем, садржајем и исходима предмета, као и са планом рада и обавезама студената**
Увод у математичку логику
 - Математички појам
 - Елементи математичке логики
 - Логичке операције
 - Исказне формуле, таутологије, правила закључивања
 - Квантификатори
- 2. Скуп као основни математички појам**
 - Појам скупа. Записивање, обележавање и графичко представљање скупова
 - Операције са скуповима. Унија, пресек, разлика и комплемент. Декартов производ скупова
 - Релације на скупу
- 3. Скуп као основни математички појам**
 - Пресликавање (функција). Операције на скупу. Алгебарске структуре.
- 4. Скуп природних бројева**
 - Појам природног броја. Пеанова аритметика. Бројевни системи
 - Проширење скупа природних бројева
- 5. Мера и мерење**
 - Мера на скупу, јединица мере, мерење и мерни број
 - Стандардне јединице мере - SI систем мера, изведене јединице мере.
- 6. КОЛОКВИЈУМ**
- 7. Појам и основне особине вероватноће**
 - Експеримент са случајним исходима. Случајан догађај
 - Закон великих бројева. Статистичка дефиниција вероватноће
 - Простор вероватноћа. Особине вероватноће
- 8. Појам и израчунавање вероватноће**
 - Класична дефиниција вероватноће. Статистичка вероватноћа
 - Условне вероватноће. Независност догађаја
 - Маргиналне вероватноће
- 9. Вероватноћа и информација – Основни појмови Шенонове теорије**
- 10. Еуклидска геометрија**
 - Савремена еуклидска геометрија
 - Аксиоме припадања. Аксиоме распореда
 - Дуж, полуправа, полураван, полупростор, конвексност/конкавност – дефиниције
 - Аксиоме подударности. Последице аксиома подударности
- 11. Еуклидска геометрија**
 - Кружница и круг - дефиниција
 - Сечица и тангента - дефиниција
 - Аксиоме непрекидности
 - Аксиома паралелности
 - Паралелност правих – дефиниција
 - Паралелност праве и равни - дефиниција
 - Угао и многоугао - дефиниције
 - Троугао
 - Четвороугао (паралелограм, правоугаоник, квадрат, ромб, трапез и делтоид)
- 12. Еуклидска геометрија**
 - Диедар и рогал - дефиниције
 - Проста полиедарска површ. Полиедар
 - Призма (паралелепипед, квадар и коцка)
 - Пирамида (тетраедар, четворострана пирамида)

АКАДЕМИЈА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА ШАБАЦ
Одсек студија за васпитаче и медицинске сестре васпитаче
МАТЕМАТИКА
III семестар

- Правилни полиедри - класификација
- Нерогљаста тела. Обртна тела (ваљак, купа, лопта)

13.-15. Припрема за завршни испит и евалуација рада студената

Начин оцењивања

Коначна оцена се формира на основу укупног броја поена стечених на предиспитним обавезама и завршном испиту, тако да:

$$\begin{aligned} 51 \text{ поена} &\leq \text{оцена 6 (шест)} \leq 60 \text{ поена} \\ 61 \text{ поена} &\leq \text{оцена 7 (седам)} \leq 70 \text{ поена} \\ 71 \text{ поена} &\leq \text{оцена 8 (осам)} \leq 80 \text{ поена} \\ 81 \text{ поена} &\leq \text{оцена 9 (девет)} \leq 90 \text{ поена} \\ 91 \text{ поена} &\leq \text{оцена 10 (десет)} \leq 100 \text{ поена} \end{aligned}$$

Оцена знања (максималан број поена 100)			
Предиспитне обавезе	поена до 50	Завршни испит	поена до 50
активности у току часова предавања	до 10	писмени испит	до 30
колоквијуми	до 40	усмени испит	до 20

1. Предиспитне обавезе (до 50 поена)

Да би студент могао да приступи финалном испиту, потребно је да од максималних 50 сакупи минимум **30 поена** на предиспитним обавезама. У противном студент нема право изласка на испит!

1.1 Предавања (до 10 поена)

Присуство и активност на часовима предавања се бодују до **10 поена**.

1.2 Колоквијум-и (до 40 поена)

Колоквијум1 се састоји из задатака и полаже се писмено. Да би се колоквијум1 положио потребно је прикупити **минимум 11** од могућих **20 поена**. **Додатних 20 поена**, студенти могу сакупити кроз израду домаћих задатака (до 10 поена) и кроз **колоквијум 2** из вероватноће (**минимум 5 од 10 поена**).

2. Завршни испит (до 50 поена)

Састоји се из писменог и усменог дела. Писмени део испита подразумева решавање задатака и теста из обрађене теорије и бодује се до **30 поена** - **минимално 20 поена потребно за пролаз**. Усмени део испита заснован је на усменим одговорима из теорије и бодује се до **20 поена**.

3. Литература

1. Т. Бајић (2022): Наставни садржаји са предавања. Домаћи задаци
2. М. Дејић (2008): *Елементарни математички појмови*, Збирка задатака са елементима теорије, Учитељски факултет, Београд.
3. P. S. Mann (2007): *Introductory Statistics*, 6th Edition International Student Version, John Wiley and Sons. (превод са енглеског: стране 137-176)

Предметни наставник
мр Татјана Бајић, проф.-предавач